PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1918. Redaktionsschluß für No. 19 am 23. August 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

G. Laski, Anwendung der Grundempfindungstheorie zur Größenbestimmung submikroskopischer Partikel. S. 369.

R. Bär, Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe". S. 373.

K. Lichtenecker, Über den Widerstand gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter. S. 374.

E. Grüneisen, Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur. S. 382.

P. Selényi, Über spiegelnde Flächen negativer Krümmung. S. 386.

O. Meißner, Die Wärmedämmerung. S. 387.

R. Malmström, Berichtigung. S. 388.

Besprechungen:

H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. IV. S. 389.

R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. S. 390.

W. Estorff, Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke. S. 390.

F. M. Jaeger, Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. S. 391.

A. Wegener, Wind- und Wasserhosen in Europa. S. 392.

Personalien. S. 392.

Angebote. S. 392.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anwendung der Grundempfindungstheorie zur Größenbestimmung submikroskopischer Partikel.

Von Gerda Laski.

In einer früheren Untersuchung[1]) habe ich die Größenbestimmung einzelner submikroskopischer Silberkugeln auf optischem und mechanischem Wege durchgeführt. Solche Teilchen, deren Dimensionen der Lichtwellenlänge vergleichbar sind, zeigen bekanntlich im senkrecht abgebeugten Lichte des Dunkelfeldes Farben, deren Beschaffenheit vom Radius des Kügelchens, vom Material, und der Art des einfallenden Lichtes abhängt. Zur vergleichenden Größenbestimmung der Silberkügelchen wurde einerseits an einem einzelnen Partikel bestimmter beobachteter Farbe der Radius aus der gemessenen Fallgeschwindigkeit nach dem Widerstandsgesetz sowie vergleichsweise aus den Abweichungen von der mittleren Fallzeit nach der Theorie der Brownschen Bewegung ermittelt, andererseits aus der elektromagnetischen Beugungstheorie des Lichtes das Ausstrahlungsspektrum von Kügelchen bestimmter Größe und optisch definierten Materials berechnet.

Die Ausstrahlungskurve jedes solchen Kügelchens besitzt ein deutliches Maximum der Intensität bei bestimmter Wellenlänge. Aus der Lage dieses Maximums hat F. Ehrenhaft[2]) für Gold- und Quecksilberkügelchen die Farbe, in der einzelne Kügelchen von bestimmter Größe dem Beobachter im Dunkelfelde der Theorie nach erscheinen müssen, in der Weise bestimmt, daß er ihre Wellenlänge gleich der dem Maximum der Ausstrahlungskurve entsprechenden Wellenlänge setzte. Damit war die Möglichkeit einer weiteren Größenbestimmung gegeben.

Die Erhebungen der Ausstrahlungskurven umfassen, von kleineren zu größeren Partikeln fortschreitend, immer größere Spektralbereiche, so daß niemals gesättigte, der Wellenlänge des Maximums entsprechende, scharf definierte Spektralfarben daraus hervorgehen; die physiologisch beobachtete Mischfarbe ist daher nur in erster Näherung dem Maximum der berechneten Kurven zu entnehmen.

Um also den Vergleich zwischen der für Partikel bestimmter angenommener Größe berechneten und der an Partikeln gemessener Größe beobachteten Farbe präziser durchführen zu können, war auf Grundlage der physiologischen Optik die folgende Frage zu lösen: In welcher Farbe des Spektrums müssen Kugeln bestimmten Materials und von Dimensionen, die der Wellenlänge des Lichtes vergleichbar sind, dem Auge erscheinen, deren Ausstrahlungsspektrum auf das Spektrum des einstrahlenden Lichtes bezogen, aus der elektromagnetischen Beugungstheorie errechnet wurde?

Den ursprünglichen Berechnungen lag die unrealisierbare Annahme zugrunde, daß Licht eingestrahlt werde, in welchem jede Wellenlänge in gleicher Intensität vertreten ist; die Beobachtungen wurden jedoch unter Beleuchtung von Bogenlampen ausgeführt.

1) G. Laski, Ann. d. Phys. **53**, 1, 1917; Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. **126** (IIa), 601, 1917.

2) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914; **16**, 227, 1915.

Es wurden daher die Ordinaten der berechneten Ausstrahlungskurven von Silberkugeln vorerst der Energieverteilung des einfallenden Bogenlampenspektrums entsprechend umgerechnet [1]).

Die weitere Aufgabe ist einem bereits behandelten Problem ähnlich. F. Exner [2]) hat die Wellenlänge in der Natur vorkommender Farben, z. B. von Edelsteinen oder Blüten, aus der spektralphotometrisch gemessenen Ausstrahlungskurve berechnet. Dabei stützte er sich auf die Helmholtz-Youngsche Grundempfindungstheorie, nach welcher jede Spektralfarbe aus verschiedenen Anteilen dreier Grundempfindungen, rot, grün, blau, aufgebaut werden kann und legte für seine Zwecke die von König und Dieterici gemessenen Grundempfindungskurven aufs Neue fest, d. h. er bestimmte die relativen Anteile an Grundempfindung, welche jede Spektralfarbe im weißen Lichte enthält [3]). Exner hat also die einer physiologisch gegebenen Farbe zugeordnete Spektralfarbe gesucht.

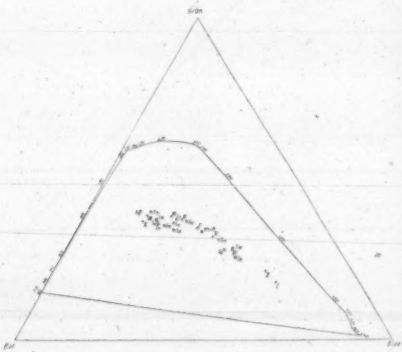
In unserem Falle ist umgekehrt aus den berechneten Ausstrahlungsspektren die entsprechende physiologisch wahrnehmbare Farbe zu ermitteln, und mit dem Experimente zu vergleichen. Es handelte sich also darum, die Resultate der physiologischen Optik auf ein rein physikalisch gegebenes Problem anzuwenden.

Demgemäß wurde jede der Ausstrahlungskurven des Silbers in die drei Grundempfindungskurven zerlegt, indem ihre Ordinaten mit den von Exner angegebenen Reduktionsfaktoren multipliziert wurden. Der Flächeninhalt jeder dieser drei Kurven wurde durch Planimetrierung gefunden und die Koordinaten jenes Punktes im Farbendreieck ermittelt, welcher der resultierenden Mischfarbe entspricht.

Zeichnet man sich die Kurve der Spektralfarben [1]) in das Farbendreieck [2]) ein, so gibt der Schnittpunkt der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt und den Weißpunkt mit der Spektralkurve die der resultierenden Mischfarbe entsprechende Spektralfarbe an.

Die Berechnungen wurden vorerst an Silberkügelchen für 9 Partikelgrößen im Intervalle $4—10 \cdot 10^{-6}$ cm Radius ausgeführt.

In der Figur sind die berechneten Punkte durch



Kreuze im Farbendreieck bezeichnet; die zugehörigen Daten sind Tabelle I zu entnehmen. Die Verbindung des ersten Punktes (Radius $4 \cdot 10^{-6}$ cm) fällt auf die Purpurlinie, die Verbindungslinie des äußersten sichtbaren Blau und Rot. Partikel vom Radius $4 \cdot 10^{-6}$ cm erscheinen also purpurviolett, noch kleinere müssen tiefpurpurn erscheinen.

Nunmehr erklärt sich die interessante Tatsache, daß die kleinsten Silberpartikel im Dunkelfelde rötlich erscheinen, während die Wellenlänge des Maximums der Ausstrahlungskurve violett ergab.

Der Sättigungsgrad der einzelnen Partikelfarben, bezogen auf die Sättigung der entsprechenden Spektralfarbe, ist in Tabelle I angegeben. Die purpurnen Partikeln zeigen entsprechend ihrer Entfernung vom Weißpunkt eine sehr gesättigte Farbe; sie sind in der Tabelle, wie üblich, durch ihre Komplimentärfarbe charakterisiert. Die Sättigung der Farbe nimmt über blau und blaugrün ab und erreicht

1) Innerhalb des mit freiem Auge gewöhnlich sichtbaren Teiles (400—700 $\mu\mu$) des Bogenlampenspektrums zeigt sich nach den Beobachtungen von Snow (Wied. Ann. 47, 222, 1892) ein allmähliches Abfallen der Energie von Orange bis Blau und nur am Ende des sichtbaren Violett wächst die Energie wieder und steigt zwischen 410 und 420 zu einem aus mehreren Linien bestehenden Maximum an. Die Messungen Snows beziehen sich auf ein prismatisches Spektrum und wurden von diesem Autor auf das normale Gitterspektrum umgerechnet. Über die Zulässigkeit dieser Berechnung vgl. l. c. S. 229. Doch ist die durch die hierbei gemachte Vernachlässigung verursachte Abweichung sicher kleiner als diejenige, welche durch Benützung verschiedener Kohle entsteht. — Durch das Snowsche Spektrum wurde eine glatte Kurve gelegt, durch welche einige Linien, die aber zum Integrale nichts beitragen, abgeglichen wurden; bei diesem Ausgleich mußte man auch den Einfluß der Linien im Violett eliminieren, da die optischen Gläser einen stärkeren Prozentsatz des Violett absorbieren und die Lichtstrahlen der benützten Bogenlampen einen Glasweg von ca. 4 cm zu passieren hatten.

2) F. Exner, Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wiss. III (IIa), 901, 1902; F. u. S. Exner ebenda 119 (I), 191, 1910.

3) F. Exner, Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wiss. III (IIa), 857, 1902.

1) F. Exner l. c. S. 871.

2) Das benutzte Farbendreieck ist gleichseitig und hat eine Seitenlänge von 50 cm.

Tabelle I.

Nummer des Punktes	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Wellenlänge	Ordinaten des Punktes im Farbendreieck		Prozentualer Gehalt an Grundempfindung			Relative Sättigung
			x	y	rot	grün	blau	
I.	4	kompl.	34,5	7,6	22,3	17,6	60,1	0,54
II.	5	467	33,2	9,2	23,3	20,9	55,8	0,49
III.	6	472	29,0	11,9	27,2	26,3	42,3	0,30
IV.	6,5	483	26,5	13,8	31,2	31,8	36,8	0,12
V.	7	566	24,4	15,0	34,0	34,7	31,4	0,08
VI.	7,5	576	22,4	16,1	36,7	37,3	26,3	0,24
VII.	8	581	21	16,5	38,8	38,1	23,0	0,34
VIII.	9	589	18,1	16,7	44,6	38,6	16,9	0,52
IX.	10	597	17,4	15,9	46,9	36,7	16,3	0,53

in grün ein Minimum; dann nimmt sie über gelb gegen orange zu.

Es scheint eine Tatsache zu sein, daß in der Natur das Grün immer in verhältnismäßig ungesättigtem Zustande vorkommt, was auch aus den Messungen Exners hervorgeht. Subjektiv erscheinen die grünen Silberpartikel in kräftiger Farbe; dennoch stimmt die Berechnung im Farbendreieck auch bezüglich des Sättigungsgrades mit den früheren Angaben über die beobachtete Farbe auf Grund der Raddeschen Farbenskala. Es wurden grüne Partikel nach den Tabellen 12—16 von Radde (gelbgrün, grasgrün, blaugrün) Sättigungsgrad i—n bezeichnet, da eine feinere Unterscheidung der Nuancen unsicher wäre. Exner gibt (Wien. Ber. 119, S. 239) für das Grün der Raddeschen Skala Nr. 15 Sättigungsgrad h $S = 0{,}2$ an; diese Farbe entspricht auf Grund von Interpolation der vorliegenden Berechnungen Silberpartikeln vom Radius $6{,}7 \cdot 10^{-6}$ cm, nur mit geringerer Sättigung. Für Partikeln dieser Größe berechnet sich nach Tabelle I, der Sättigungsgrad $S = 0{,}1$.

In Tabelle II sind in der ersten Kolonne die Farbenbereiche des Spektrums nach der Einteilung von Helmholtz[1]) angegeben; in der zweiten Kolonne sind die Intervalle der Radien von Silberpartikeln angeführt, welche diesen Farben nach der Figur entsprechen; die blaue Farbe umfaßt ein größeres Radienintervall, die grüne Farbe ein kleineres, als in den ursprüng-

Tabelle II.

Wellenl. Farbe nach Helmholtz	Intervall des Radius aus dem Farbendreieck	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit	Radius $a \cdot 10^6$ cm aus d. Widerstandsgesetz	aus d. Brownschen Bewegg.	Beobachtungen von Ehrenhaft $a \cdot 10^6$ cm Rad.	beob. Farbe
590—656 gelb bis orange		orange	3,35	12,4		13,6	
			2,94	11,5	14,6	12,4	orange
			2,89	11,3	15,7		
		orangegelb	2,86	11,3			
			2,46	10,2			
			2,39	10,1		10,1	orangegelb
	von 9,3 aufwärts		2,26	9,7	15,5	10,0	
574—590 reines gelb	7,5 bis 9,3	gelb	2,12	9,3	12,9	9,9	
			1,86	8,5		8,9	
			1,71	8,1		9,0	gelb
			1,60	7,7	10,8	7,6	
						7,3	
527—574 grüngelb	6,9 bis 7,5	blaßgelb	1,53	7,5	10,7		
		gelbgrün	1,53	7,5		6,5	grüngelb
			1,47	7,3			
517—527 reines grün	6,5 bis 6,9	grün		6,5			
486—517 blaugrün							
467—486 cyanblau	5,0 bis 6,5	blau		5,3			
431—467 indigo darunter purpur	4 bis 5,0	purpur		4,9			

1) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik, III. Aufl. 1911, Bd. 2, S. 54 u. 63.

lichen Schätzungen. Die Unterscheidung zwischen orangegelb und orange wurde fallen gelassen, da auch Helmholtz sie nicht durchführt. In Kolonne 3 stehen die Messungsresultate für die Fallgeschwindigkeit von Silberkugeln, deren beobachtete Farbe festgelegt wurde; daneben die aus der Fallgeschwindigkeit nach dem Widerstandsgesetz berechneten Radien. Auch die nach der Theorie der Brownschen Bewegung aus denselben Versuchsdaten errechneten Radien wurden hinzugefügt, zum Vergleiche sind außerdem auch einige Messungen, welche Ehrenhaft[1]) an Silberpartikeln ausgeführt hat, angegeben.

Aus Tabelle II geht hervor, daß aus diesen, nach den tatsächlichen Verhältnissen des Experiments korrigierten Berechnungen der Radien von Silberpartikeln aus der optischen Theorie eine noch verbesserte Übereinstimmung mit den auf mechanischem Wege auf Grund des Widerstandsgesetzes ermittelten Radien folgt.

Die Anwendung der hier erörterten Methode zur Bestimmung der resultierenden Farbe submikroskopischer Partikel erscheint besonders bei den von J. Parankiewicz[2]) berechneten Ausstrahlungskurven kleinster Schwefelkügelchen angezeigt, welche mitunter mehrere Maxima aufweisen.

Es wurden daher für 12 Schwefelpartikel im Intervalle $8—20 \cdot 10^{-6}$ cm Radius die Farben auf dieselbe Weise berechnet. Es ergab sich die folgende Zuordnung:

Tabelle III.

Radius $a \cdot 10^6$ cm	Ordinaten des Punktes im Farbendreieck x	y	Wellenlänge	Farbe
8	28,0	12,1	kompl. 568	purpur
9	29,4	11,0	kompl. 567	violett
10	29,1	12,3	481	
11	26,2	13,4	482	cyan
12	23,0	15,8	573	grün
13	21,7	16,1	580	grüngelb
14	21,3	15,5	590	gelb
15	21,3	14,7	603	
16	20,1	16,3	599	gelb, Stich ins
17	19,3	16,5	598	orange
18	19,1	16,0	592	
19	18,4	17,1	585	Eigenfarbe
20	17,1	17,2	589	

Aus dieser Tabelle kann man folgendes entnehmen: Die Farbe von Schwefelteilchen der Größen $8—9 \cdot 10^{-6}$ cm fällt nach dieser Berechnung wieder auf die Purpurlinie; beobachtet wurden bisher nur violette Partikel, die von I. Parankiewicz der Tabelle 21 der Radde schen Farbenskala zugeordnet wurden; Partikel vom Radius 9—11 sind blau, solche vom Radius 11—12 blaugrün bis grün, die Größen $12—13 \cdot 10^{-6}$ cm zeigen grüngelbe Farbe im Übergang zu gelb, $13—15 \cdot 10^{-6}$ cm ist tiefgelb, größere Partikel vom Radius 15—17 $\cdot 10^{-6}$ cm weisen einen Stich ins orange auf; Partikel vom Radius $18 \cdot 10^{-6}$ cm aufwärts zeigen wieder eine gelbliche Färbung, welche der Farbe des makroskopischen Schwefels sehr ähnlich erscheint. Um darüber Klarheit zu schaffen, ob bei dieser Größenordnung tatsächlich das Beugungsphänomen aufhört und die „Eigenfarbe" des Schwefels, d. h. in diesem Falle die Farbe, welche makroskopischer Schwefel im Bogenlampenlicht reflektiert, auftritt, wurde die Wellenlänge des vom Schwefel unter diesen Umständen direkt reflektierten Lichtes auf folgende Weise ermittelt: Nach der Fresnelschen Reflexionsformel

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

wurde das Reflexionsvermögen R des Schwefels aus seinen Brechungsexponenten[1]) für verschiedene Wellenlängen berechnet und aus dem so erhaltenen Reflexionsspektrum, bezogen auf das Bogenlampenspektrum, in der hier bereits erörterten Weise die physiologische Mischfarbe, welche makroskopischer Schwefel im direkt reflektierten Bogenlampenlichte zeigt, ermittelt. Es ergab sich die Wellenlänge 592 $\mu\mu$, während Schwefelteilchen vom Radius $18—20 \cdot 10^{-6}$ cm (Tabelle III) die gleiche Farbe ergeben.

Damit scheint mir der Beweis erbracht, daß die durch Beugung hervorgerufenen Farben submikroskopischer Teilchen schon von der

Tabelle IV.

Beobachtete Farbe	Radius aus dem Widerstandsgesetz $f = 0$	Radius aus der optischen Theorie
blauviolett	8,83	8—9
	8,83	
blau	10,13	9—11
	10,54	
	10,94	
blaugrün	11,53	blaugrün bis grün 11—12
	11,60	
	11,68	
grün	12,21	
	12,45	
gelb	15,40	13—15
orange	17,43	15—18

1) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **18**, 353, 1917; Ann. d. Phys. **56**, 53, 1918.

2) Vgl. eine demnächst in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie und in den Annalen der Physik erscheinende Abhandlung.

1) Interpoliert nach H. E. Mervin und E. L. Larsen, Amer. Journ. Soc. [4] 34, 43.

Größe $18 \cdot 10^{-6}$ cm ab in die Farbe des kompakten Materials übergehen.

In Tabelle IV werden einige Bestimmungen der Größe von Schwefelpartikeln aus Fallgeschwindigkeit und Farbe nach Messungen von I. Parankiewicz[1]) angeführt.

Es ergeben sich aus diesen Beobachtungen, bei denen die Farbe jedes einzelnen Partikels durch Vergleich mit der Raddeschen Farbenskala konstatiert wurde, Resultate für die Radien, welche in Übereinstimmung mit den Resultaten der hier erörterten optischen Methode stehen.

Zusammenfassung.

Durch Anwendung der Helmholtz-Youngschen Grundempfindungstheorie kann die physiologisch resultierende Farbe eines berechneten Ausstrahlungsspektrums ermittelt werden.

Diese Methode wird im speziellen Falle angewendet, um aus den Ausstrahlungsspektren submikroskopischer Silber- und Schwefelkügelchen, welche aus der Beugungstheorie berechnet wurden, die bei Beobachtung mit Bogenlampenbeleuchtung erscheinende Farbe zu bestimmen. Diese Bestimmung wird durch Resultate des Experiments geprüft, indem die Größe dieser Kügelchen einerseits auf mechanischem Wege, andererseits durch Beobachtung ihrer Farbe bestimmt wird. Beide Größen stimmen überein. Die bisher angewandte Farbenschätzung aus den Maximis der Ausstrahlungskurven ergibt im wesentlichen dieselben Resultate wie die hier auseinandergesetzte genauere Methode optischer Größenbestimmung.

Es ergibt sich ferner auch auf diesem Wege, daß bereits bei Partikeln der Größe unterhalb Lichtwellenlänge die durch Beugung hervorgerufene Farbe in die Farbe des massiven Materials übergeht.

1) I. Parankiewicz, l. c.

Wien, I. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 18. Mai 1918.)

Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“[1]).

Von R. Bär.

Fräulein Parankiewicz berechnet in dieser Arbeit Größe und Ladung ultramikroskopischer Partikeln aus dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz für $f = 0$ (die Größe f bedeutet das Verhältnis der Zahl der elastischen zur Zahl aller Zusammenstöße der Partikel mit den Gasmolekeln). Unabhängig davon erhält sie ungefähr denselben Wert für den Teilchenradius aus der Mieschen Beugungstheorie. Als kleinste Ladung eines Teilchens findet Fräulein Parankiewicz auf diese Weise den 1800ten Teil des supponierten Elementarquantums, nämlich $2{,}68 \cdot 10^{-13}$ statt $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. Aus den am Ende der Arbeit mitgeteilten Meßprotokollen für die fünf kleinsten Hg-Teilchen läßt sich Radius und Ladung derselben aber auch aus der Brownschen Bewegung berechnen, und wenn Fräulein Parankiewicz die hieraus sich für die Ladungen der Teilchen ergebenden Werte nicht mitteilt, so geschieht dies sicher nur deswegen, weil eine genaue Berechnung derselben aus den 10—18 beobachteten Fall- und Steigzeiten nicht möglich ist. Aber über die Größenordnungen der Ladungen muß man auf diesem Wege Aufschluß erhalten.

Ich finde nun unter Benutzung der von Weiß[1]) angegebenen Formeln und mit $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$, $R = 8{,}31 \cdot 10^{7}$, $T = 293$ folgende Werte für die Ladungen der Teilchen (e_f, e_s, e = Ladung, berechnet bzw. aus den Fall-, Steig-, Fall- und Steigzeiten):

Teilchen-Nr.	Zahl der Fallzeiten	$e_f \cdot 10^{10}$	Zahl der Steigzeiten	$e_s \cdot 10^{10}$	$e \cdot 10^{10}$	Von Frl. Parankiewicz berechnete Ladung nach Stokes-Cunningham
12	8	1,86	7	2,74	2,19	$2{,}68 \cdot 10^{-13}$
10	10	1,77	7	9,15	2,65	$3{,}09 \cdot 10^{-13}$
1	6	1,40	5	4,70	2,06	$9{,}7 \cdot 10^{-13}$
13	9	4,72	9	6,50	5,50	$44.4 \cdot 10^{-13}$ *)
9	6	0,88	4	1,38	1,03	$15{,}2 \cdot 10^{-13}$

*) Berechnet von R. Bär.

Nach den von Schrödinger[2]) für die Fehlerabschätzung gegebenen Formeln findet man, daß diese Werte für die Ladungen auf ca. 40—70 Proz. genau sind. Wir sehen also: Die aus der Brownschen Bewegung errechneten Werte für die Ladungen dieser kleinsten bisher beobachteten ultramikroskopischen Partikeln sind durchaus noch von der Größenordnung des Millikanschen Wertes für das Elementarquantum.

1) E. Weiß, Sitzber. d. Wien. Akad. **120**, 1029, 1911.
2) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 294, 1915.

Zürich, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Juni 1918.)

1) Diese Zeitschr. **18**, 567, 1917.

Über den Widerstand gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter.

Von Karl Lichtenecker.

Durch Arbeiten von Guertler[1]), mir[2]) und Benedicks[3]) ist es von Interesse geworden, den Widerstand gewisser körperlicher, bzw. flächenhafter Leiter näher zu untersuchen. Guertler hat in der angeführten Abhandlung meines Wissens zuerst die Frage nach dem elektrischen Widerstand eines zusammengesetzten Leiters behandelt, dessen Bestandteile in einer tesseralen Raumgitteranordnung, also schachbrettartig verteilt sind. Er wies darauf hin, daß wenn w_1 und w_2 die spezifischen, auf die Volumeinheiten bezogenen Widerstände der beiden Bestandteile sind, eine Zerlegung des räumlichen Leiters nach Stangen in der Stromrichtung auf den spezifischen Widerstand der Kombination

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

führen würde, eine Zerlegung nach Platten senkrecht zur Stromrichtung dagegen, für den spezifischen Widerstand derselben Kombination, den Wert

$$w = \frac{2\,w_1\,w_2}{w_1 + w_2}$$

liefern würde (Fig. 1).

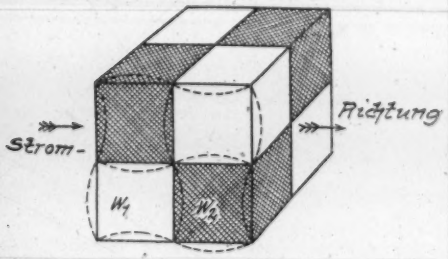


Fig. 1.

Als Begründung für diese Diskrepanz gibt Guertler richtig an, daß weder die eine noch die andere Zerlegung statthaft ist, sondern nur eine solche nach Stromfäden oder nach Flächen gleichen Potentials, so daß dem zusammengesetzten Leiter in Wirklichkeit weder der Widerstand

$$\frac{w_1 + w_2}{2}$$

noch

$$\frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

zukommt, sondern ein von beiden verschiedener, zwischen denselben liegender Wert, über den Guertler nähere Angaben in der angeführten Arbeit nicht macht. Nach den Messungen Matthiesens weisen die Legierungen der „mischkristallfreien" Klasse von gleichem Volumanteil beider Bestandteile ebenfalls einen Widerstand auf, der in jedem Falle zwischen den durch

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

gegebenen Grenzen bleibt. Insofern also steht das Verhalten der Legierungen von Metallen der mischkristallfreien Gruppe im Einklang mit dem zum Vergleich herangezogenen Schachbrettmodell.

Dies bot mir[1]) Anlaß zu untersuchen, ob sich der wahre Wert des Widerstands des Guertlerschen Modells nicht mit größerer Annäherung als durch die beiden oben genannten Grenzwerte berechnen läßt, um zu prüfen, inwieweit auch dann noch eine Übereinstimmung zwischen den Widerstandswerten der Legierungen und denen des gewählten Modells vorliegt. Bei dieser, unter durchaus einfachen Annahmen gemachten Rechnung ergaben sich Werte für den Widerstand des tesseralen Modells, die eine sehr weitgehende Übereinstimmung mit den von Matthiesen an Legierungen gemessenen zeigen.

Ich habe mich damals begnügt, auf diese Übereinstimmung hinzuweisen; die Möglichkeit, die Abweichung der Widerstandswerte der bezeichneten Legierungen vom arithmetischen, bzw. harmonischen Mittel durch Schwankungen des Stromfadenquerschnitts, bzw. Übergreifen der Stromfäden über die Materialgrenzen zu deuten, war dadurch ohne Zweifel gestützt.

Im Vorjahre hat nun C. Benedicks[2]) eine Abhandlung veröffentlicht, welche eine Methode zur experimentellen Messung von Widerständen flächenhafter Leiter enthält, die aus Bestandteilen von verschiedener spezifischer Leitfähigkeit zusammengesetzt sind. Als Leiter dient ausschließlich Quecksilber und die verschiedene spezifische Leitfähigkeit ist dadurch erreicht, daß durch nichtleitende, eingesenkte Platten verschiedener Gestalt die Dicke der leitenden Quecksilberschicht an verschiedenen Stellen verschieden groß gemacht wird. Bei einer Reihe dieser Versuche war die Leiterkombination eine derartige, daß der eine der beiden Bestandteile

1) W. Guertler, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 5, 17, 1908.
2) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 10, 1005, 1909.
3) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.

1) a. a. O.
2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.

ein in sich vollkommen zusammenhängendes Ganzes bildete, der andere der beiden Bestandteile dagegen in Form von Kreisen, Rechtecken usf. im ersteren eingesprengt war. Das qualitative Ergebnis dieser, nach seiner Methode ausgeführten Messungen faßte C. Benedicks zusammen, wie folgt:

I. Ist der eingesprengte Bestandteil der besser leitende, so ist die Leitfähigkeit der Kombination bedeutend geringer, als dem linearen Gesetz für die Leitfähigkeit entspräche, der Widerstand dagegen „kommt einer Geraden ziemlich nahe".

II. Ist der eingesprengte Bestandteil der schlechtere Leiter, so zeigt sich „die Leitfähigkeit, soweit die Genauigkeit der Bestimmung ein Urteil gestattet, als eine lineare Funktion der Zusammensetzung".

Aus diesem Ergebnis, zusammengenommen mit der Tatsache, daß die Widerstände der Metallegierungen nach Matthiesen sich mit größerer Annäherung mit der Annahme linearer Leitfähigkeit als mit der Annahme linearen Widerstandes vereinbaren lassen, schloß Benedicks, daß in der Natur bei den Legierungen der Fall II realisiert sein müsse und daß somit das Guertlersche Modell mit der Erfahrung unvereinbar sei. Veranlaßt durch meinen Hinweis[1]) darauf, daß die in der genannten Arbeit von Benedicks mitgeteilten qualitativen Ergebnisse keine geeignete Grundlage bieten, um die Frage nach der Größe des Metallegierungswiderstandes im Intervall

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ bis } \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

noch auch um die Frage nach der prinzipiellen Zulässigkeit des Guertlerschen Modells zu entscheiden, hat nun C. Benedicks[2]) sich in dankenswerter Weise veranlaßt gesehen, quantitatives Versuchsmaterial nach der in seiner erstgenannten Arbeit dargelegten Methode zu veröffentlichen. In diesem Zusammenhange sind die Mitteilungen über jene Versuche von besonderem Interesse, welche ein von diesem Autor experimentell verifiziertes Schachbrettmodell betreffen. Die Meßergebnisse des genannten Forschers stimmen mit den von ihm nach meiner Methode neuerdings errechneten durchaus nicht überein. Sie sind aber auch, wie im folgenden gezeigt wird, mit gewissen fundamentalen theoretischen Sätzen im Widerspruch. Im Verlauf dieser Untersuchung werden die Prinzipien, nach denen für den Widerstand eines tesseralen Aggregats eine obere und untere Grenze herzuleiten ist, zu verallgemeinern sein (I). Für eine besondere Anordnung dieser Art, die den Versuchen von C. Benedicks zugrundeliegt, werden diese beiden Grenzwerte neu berechnet werden (II). Aus dem Vergleich der so gefundenen Werte mit den Meßresultaten von Benedicks werden Schlüsse über die Experimentalmethode von Benedicks, über die von dem genannten Forscher daraus abgeleiteten allgemeinen Sätze, sowie schließlich über die Verwendbarkeit und den Genauigkeitsgrad von Lichteneckers Rechnungsmethode zu ziehen sein (III).

Im letzten (IV.) Abschnitt schließlich wird von den tesseralen (Schachbrett-)Modellen ein Übergang zu sehr allgemeinen Aggregaten und damit zu wirklichen Legierungen hergestellt. Es wird ein allgemeiner Satz aufgestellt werden, welcher für solche Aggregate theoretische Grenzwerte des Widerstandes kennen lehrt, und der die Berechtigung hervortreten läßt, bei Betrachtungen über Legierungswiderstände tesserale Modelle heranzuziehen.

I. Theoretische Grenzen für den Widerstand des schachbrettförmigen Modells.

Nach einer Feststellung von Maxwell[1]) hat Rayleigh[2]) als erster eine Methode angegeben, welche gestattet, für beliebige körperliche Leiter sowohl mit konstantem als auch mit von Punkt zu Punkt veränderlichem spezifischen Widerstand eine obere und eine untere Grenze des Widerstandes anzugeben. Die Methode beruht auf zwei allgemeinen Sätzen, von denen (I) eine untere, (II) eine obere Grenze für den Widerstand des körperlichen Leiters festlegt und welche hier wörtlich nach Maxwells Darstellung angeführt werden müssen.

(I.) „Zieht man in dem Leiter eine Reihe von Flächen, deren erste mit der Fläche der ersten Elektrode und deren letzte mit der Fläche der zweiten Elektrode zusammenfällt, während die Zwischenflächen in dem nichtleitenden Teil der Oberfläche des Konduktors enden und einander nicht durchsetzen; denkt man sich ferner jede dieser Flächen als aus einer dünnen Schicht einer vollkommen leitenden Substanz bestehend, so erhält man ein System, dessen Widerstand sicher nicht größer als der des ursprünglichen Konduktors ist, dessen Widerstand aber dem des Konduktors gleich wird, wenn die eingeführten Flächen mit den äquipotentiellen Flächen des Konduktors in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen."

1) K. Lichtenecker, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **14**, 466, 1917.

2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **14**, 470, 1917.

1) J. C. Maxwell, Treatise. Deutsche Ausgabe I, S. 442.

2) Rayleigh, Phil. Trans. 1871, S. 77.

(II.) „Um noch eine obere Grenze für den Widerstand angeben zu können, legen wir wieder innerhalb des Konduktors Flächen, die wir aber diesmal als für Elektrizität vollkommen undurchgängig annehmen. Zwei Systeme solcher Flächen zerlegen den Konduktor in einzelne Röhren, die den Strom der Elektrizität regulieren. Dadurch wird der Widerstand des Konduktors vermehrt und bleibt nur dann ganz ungeändert, wenn diese Flächen mit den Stromflächen des Leiters, die Röhren also mit den Stromröhren in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen. Summiert man dann die Reziproka der Widerstände der einzelnen Röhren, so erhält man eine untere Grenze für den reziproken Betrag des Widerstands des Konduktors in seiner natürlichen Beschaffenheit." Man sieht ohne weiteres, daß es genau diese beiden Rayleighschen Grenzwerte des Widerstandes sind, die wir für den Leitungswiderstand des schachbrettförmigen Aggregats oben mit

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

angegeben haben.

Der erstere beider Werte für den Widerstand würde sich nämlich ergeben, wenn die einzelnen Elementarsäulen in der Stromrichtung mit nichtleitenden Hüllen umgeben und dadurch zu Stromfäden gemacht würden; den letzteren Wert erhält man, wenn man sich zwischen die einzelnen Elementarplatten der tesseralen Raumgitteranordnung senkrecht zur Stromrichtung beliebig dünne Platten von unendlich großer Leitfähigkeit eingelegt denkt und diese Begrenzungsebenen der Elementarschichten so zu Äquipotentialflächen macht.

Nun hat C. Benedicks laut seiner zuletzt erschienenen Arbeit[1]) einen zweidimensionalen schachbrettförmigen Leiter, bzw. ein Elementargebiet eines solchen, experimentell verifiziert und die quantitativen Ergebnisse dieser Messungen nunmehr veröffentlicht. Beim ersten der beiden in Betracht kommenden Versuche werden zwei Leiter zur Zusammenstellung des „Schachbrettmodells" benützt, deren spezifische Widerstände $w_2 = 109{,}4$, $w_1 = 54{,}7$ betragen (a. a. O. Seite 481 Tabelle IX, erste Zeile). Es ist somit von vornherein zu erwarten, daß, wie groß auch immer der experimentelle Wert der Kombination beider Leiter durch den Versuch sich ergeben möge, er doch sicher irgendwo zwischen den beiden vorbesprochenen Grenzwerten

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = 82{,}1 \text{ und } \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} = 72{,}9$$

liegen muß. Benedicks findet jedoch für den Widerstand seines Schachbrettmodells 86,6! Bei dem anderen der beiden mitgeteilten Versuche (dieselbe Tabelle dritte Zeile) sind die spezifischen Widerstände der beiden Leiter $w_2 = 109$ und $w_1 = 29{,}7$. Die durch die Theorie festgelegten Grenzwerte, innerhalb deren der Widerstand der Kombination liegen müßte, sind

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = 69{,}6 \text{ und } \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} = 46{,}7;$$

der Versuch ergab jedoch 69,9; also auch in diesem Falle einen außerhalb des theoretischen Intervalls liegenden Wert.

Es bleibt allerdings noch ein Umstand zu diskutieren, welcher möglicherweise diese Diskrepanz erklären könnte. Die beiden Grenzwerte für das Schachbrettmodell

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Stromrichtung parallel zur Richtung der Quadratseiten verläuft. Bei der Versuchsanordnung von C. Benedicks ist jedoch die Stromrichtung parallel zur Diagonale der Quadrate, somit um 45° gedreht. Zur vollständigen Deutlichkeit ist das Fundamentalgebiet der Versuchsanordnung von Benedicks in Fig. 2 gekennzeichnet. Nun hat schon Maxwell[1]) gelegent-

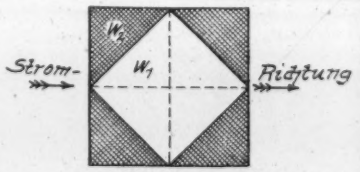


Fig. 2.

lich der Behandlung des elektrischen Widerstandes körperlicher Leiter, die aus Aggregaten verschiedener spezifischer Leitfähigkeit bestehen, darauf hingewiesen, daß der Widerstand im allgemeinen bei gleichbleibender Raumverteilung der beiderlei Bestandteile von der Stromrichtung nicht unabhängig ist, sobald die Volumkonzentration des einen Bestandteils nicht die des anderen weitaus überwiegt. Es ist daher zu untersuchen, welche theoretischen Grenzwerte sich für den Widerstand der schachbrettförmigen Anordnung für diese Stromrichtung (parallel zur Diagonale) ergeben; insbesondere, ob das in Frage stehende Intervall innerhalb des früheren gelegen ist. Wegen der Notwendig-

1) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 470, 1917.

1) J. C. Maxwell, Treatise. Deutsche Ausgabe I, S. 437.

keit auf diese Frage einzugehen, ist eingangs bei der Behandlung des schachbrettförmigen Modells über das früher von Guertler und mir gemachte Raisonnement hinaus auf das allgemeine Rayleighsche Prinzip übergegangen worden, von welchem aus beide Fälle sich als Spezialfälle behandeln lassen.

II. Berechnung des Widerstandes eines Quadrates, bestehend aus zwei, durch eine Diagonale begrenzten Hälften von verschiedenem spezifischen Widerstand.

Um zunächst eine untere Grenze w_u für den Widerstand zu finden, zerlegen wir durch Einschieben von absoluten Leitern in hintereinander geschaltete Schichten von der Breite dx (Fig. 3). Für die Leitfähigkeit dl einer solchen

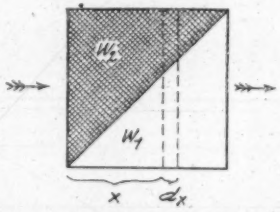


Fig. 3.

Schicht im Abstande x hat man, wenn mit l_1 und l_2 die spezifischen Leitfähigkeiten der Bestandteile bezeichnet werden,

$$dl = \frac{x}{dx} l_1 + \frac{1-x}{dx} l_2,$$

somit der Widerstand der Schicht

$$dw = \frac{dx}{x(l_1 - l_2) + l_2}$$

und der Gesamtwiderstand

$$w_u = \int_0^1 \frac{dx}{x(l_1 - l_2) + l_2} = \frac{1}{l_1 - l_2} \cdot \lg \frac{l_1}{l_2};$$

oder durch die Widerstände w_1 und w_2 der beiden Bestandteile ausgedrückt,

$$w_u = \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}.$$

Ähnlich ergibt sich für die obere Grenze w_o des Widerstandes bei Zerlegung in voneinander isolierte, nebeneinander geschaltete Stromfäden von der Breite dx (Fig. 4):

$$dw = \frac{x w_2 + (1-x) w_1}{dx}$$

$$dl = \frac{dx}{x w_2 + (1-x) w_1}$$

$$l = \int_0^1 \frac{dx}{x w_2 + (1-x) w_1} = \frac{1}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}$$

und somit

$$w_o = \frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}}.$$ [1])

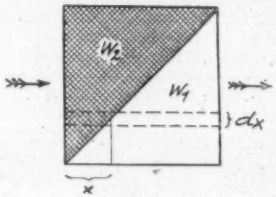


Fig. 4.

III. Vergleichende tabellarische und graphische Darstellung des gesamten Zahlenmaterials. — Folgerungen.

Nun sind die Werte der Widerstände w_1 und w_2 einzusetzen und aus den eben abgeleiten Formeln w_u und w_o auszuwerten. Die Resultate dieser Rechnung sind sowohl numerisch in der folgenden Tabelle, als auch graphisch in Fig. 5 enthalten. Es ergibt sich, daß das neue Intervall ganz innerhalb des vorigen, und zwar vollkommen symmetrisch in der Mitte desselben liegt. Die von C. Benedicks experimentell ermittelten Werte, die schon außerhalb des großen Intervalls gelegen sind, liegen natürlich noch viel mehr außerhalb dieses kleinen Intervalls.

Die nach meiner Methode von Benedicks errechneten Werte dagegen liegen nicht bloß im Innern des großen, sondern auch sehr gut in der Mitte des kleinen Intervalls.

1) Vergleicht man die Ausdrücke für die beiden Grenzwerte w_o und w_u, die sich für jede der zwei betrachteten Stromrichtungen ergeben, so hat man:
(Strom parallel der Kante)

$$w_o \cdot w_u = \frac{w_1 + w_2}{2} \cdot \frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2} = w_1 w_2 \text{ und}$$

(Strom parallel der Diagonale)

$$w_o \cdot w_u = \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}} = w_1 w_2;$$

d. h.: das geometrische Mittel der Grenzwerte des Gesamtwiderstands ist in beiden Fällen übereinstimmend gleich dem geometrischen Mittel der Widerstände der Komponenten. Dieses Ergebnis ist insofern von besonderem Interesse, als meine Rechnungsmethode für den zweidimensionalen Fall gerade auf das geometrische Mittel von w_1 und w_2 als den wahren Wert des Gesamtwiderstandes führt, wie Herr C. Benedicks a. a. O. S. 480 gezeigt hat.

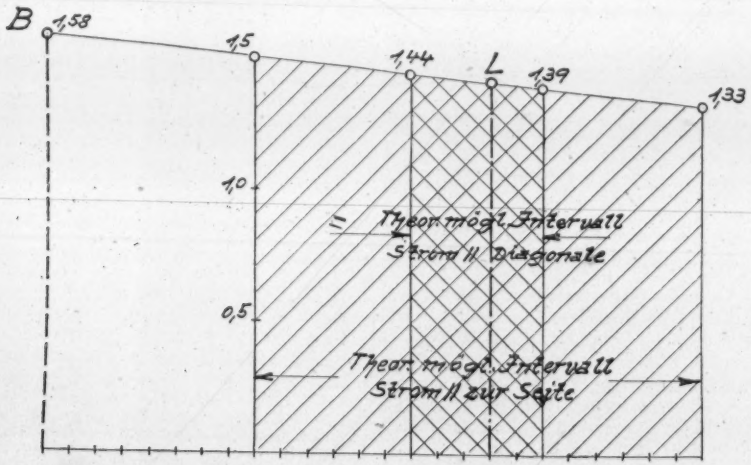
Die von dem genannten Forscher gefundenen Werte sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben[1]), außerdem aber auch der leichteren Vergleichbarkeit und Durchsichtigkeit halber so umgerechnet, daß der Widerstand der besser leitenden Komponente gleich 1 gesetzt ist. Von mir neu hinzugefügt sind nur die oberen und unteren möglichen Grenzwerte für den Widerstand, die sich ergeben, wenn die Stromrichtung a) parallel den Quadratseiten, b) parallel der Diagonale der Quadratseiten verläuft. Für den ersteren der beiden vorliegenden Versuche von Benedicks sind die Werte außerdem auch graphisch in Fig. 5 zusammengestellt.

Da die Richtigkeit der Rayleigh-Maxwellschen Sätze, auf denen die hier berechneten oberen und unteren Grenzwerte für den Widerstand beruhen, nicht in Zweifel gezogen werden kann, muß aus diesem Ergebnis gefolgert werden:

1. Der theoretisch verlangte Fall des schachbrettförmigen Leiters kann durch die bisher veröffentlichten Versuche nach der Benedicks-

Nr. der Versuchsscheibe	Widerstand der Bestandteile		Theor. mögl. Grenzwerte des Widerstands				Berechnet von Benedicks nach Lichteneckers Methode	Experim. gemessen von Benedicks
			a) Strom parallel der Seiten		b) Strom parallel der Diagonale			
	w_2	w_1	obere Gr. $\frac{w_1 + w_2}{2}$	untere Gr. $\frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2}$	obere Gr. $\frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}}$	untere Gr. $\frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}$		
6	109,4	54,7	82,1	72,9	78,77	76,03	77,4	86,6
auf $w_1 = 1$ umgerechnet	2	1	1,5	1,33	1,44	1,39	1,41	1,58
7	109,4	29,7	69,6	46,7			57,0	69,9
auf $w_1 = 1$ umgerechnet	3,69	1	2,34	1,57	2,06	1,79	1,92	2,36

Graphische Darstellung des Legierungswiderstands für den Fall einer Legierung gleicher Raumteile zweier Metalle, deren Widerstände sich wie 1 : 2 verhalten:



L .... nach Lichteneckers Methode von Benedicks errechnet.
B .... experimentell von Benedicks gemessener Wert.

Fig. 5.

1) Unverändert der Tabelle IX der Benedicksschen Arbeit, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 481, 1917 entnommen.

schen Methode nicht als genügend realisiert betrachtet werden, da die experimentellen Werte in beiden Fällen erheblich größer ausfallen, als theoretisch möglich ist. Bei aller Enthaltung von einer Kritik an den nicht näher bekannten Einzelheiten der Versuchsanordnung des genannten Forschers sei darauf hingewiesen, daß alle Fehlerquellen, die sich aus unvollständiger Raumausfüllung infolge Kapillarität, adsorbierter Luftschichten und dergleichen an den in das Quecksilber eingesenkten Einlagekörpern ergeben, stets nur den Effekt haben können, den gemessenen Widerstand des zusammengesetzten Leiters gegenüber dem wahren Werte zu vergrößern[1]).

2. Damit kommen aber auch die experimentellen Grundlagen für jene Schlußfolgerungen in Wegfall, welche C. Benedicks aus den übrigen, nach der gleichen Arbeitsmethode angestellten Versuchen zieht, wonach sich exakte Linearität der Leitfähigkeit ergeben sollte, wenn der schlechtere der beiden Elektrizitätsleiter eingesprengt, mindestens aber der bessere Leiter ein zusammenhängendes Ganzes bildet. Daß dieses von Benedicks aus seinen Versuchen abgeleitete Ergebnis: Leitfähigkeit des Legierungswiderstands als lineare Funktion der Leitfähigkeiten der Bestandteile auch theoretisch von vornherein abzulehnen ist, wird im folgenden an Hand eines dort entwickelten allgemeinen Satzes dargetan werden.

3. Die von C. Benedicks nach meiner Methode aus dem Jahre 1909 errechneten Widerstandswerte für das zweidimensionale Schachbrettmodell dagegen stehen mit den theoretisch verlangten Grenzwerten im besten Einklang. Da diese beiden Grenzwerte für den Fall: Stromrichtung parallel der Diagonale bereits außerordentlich nahe zusammengerückt sind, ist die volle Brauchbarkeit jener Rechnungsmethode für die Widerstandsberechnung der betrachteten Aggregate innerhalb dieser Grenzen erwiesen.

Es sei hier eine kurze Bemerkung angefügt. Herr Carl Benedicks erhob gegenüber meiner Rechnungsmethode neuerdings gewisse Einwendungen oder richtiger Bedenken. Sie richten sich gegen die vereinfachenden Annahmen, die der Berechnung zugrunde gelegt sind, und ohne welche eine Auswertung auf dem eingeschlagenen Wege eben nicht möglich ist. Eine Diskussion hierüber erübrigt sich m. E., zumal in dieser Hinsicht in meiner ersten Arbeit über den Gegenstand volle Klarheit herrscht. Wenn die Annahmen, die der Methode zugrunde liegen, einfach sind, die physikalische Wahrscheinlichkeit für sich haben und wenn dann die Ergebnisse der Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmen, so ist das alles, was angestrebt wurde und werden konnte.

IV. Ein allgemeiner Satz über den Leitungswiderstand beliebiger homogener und isotroper Aggregate.

Bezüglich der Anwendbarkeit vorstehender Ergebnisse auf den Leitungswiderstand von Legierungen ist nun zu bemerken, daß der seinerzeit von mir entwickelten Berechnungsmethode die Willkürlichkeit der von Guertler eingeführten tesseralen (schachbrettförmigen) räumlichen Anordnung anhaftet, von der in keiner Weise erwartet werden kann, daß sie auch nur annähernd durch die Legierungsstruktur verifiziert wird. Es erscheint daher von Wichtigkeit, zu untersuchen, ob sich auch für eine beliebige Raumanordnung zweier Bestandteile von verschiedener spezifischer Leitfähigkeit theoretische Grenzen des Gesamtwiderstands angeben lassen und im besonderen, in welcher Beziehung solche etwaige Grenzwerte zu denen des Guertlerschen Modells stehen, das meiner Berechnungsmethode zugrunde gelegt ist.

Zunächst darf zweierlei vorausgesetzt werden. Erstens, daß die Struktur der Metallegierungen homogen ist: d. h. daß die Volumkonzentration beider Bestandteile in einem, gegen die die Legierung konstituierenden Teilchen großen Volumelemente in der ganzen Legierung konstant ist. Zweitens, daß die Struktur außerdem isotrop ist, d. h. daß sich keine bevorzugten Richtungen im Raume angeben lassen, in denen herausgeschnitten gedachte parallele Stromfäden Mengen der beiden Bestandteile durchsetzen, die untereinander wesentlich verschieden sind. Es ist offenbar, daß eine vollkommen regellose Anordnung beider Bestandteile bei hinreichend großer Zahl der konstituierenden Elementarteilchen beiden Bedingungen genügt, sowie weiters, daß die tesserale Anordnung z. B. wohl der Bedingung der Homogenität, nicht aber der des Isotropismus entspricht[1]).

1) Daß die Ursache der theor. unmöglichen Messungsergebnisse in der angedeuteten Richtung zu suchen ist, wird durch eine Bemerkung von Herrn Benedicks über Konstanz und Reproduzierbarkeit seiner Messungen sehr wahrscheinlich gemacht. Er sagt (Seite 472): „Um diese gute Konstanz (der gemessenen Widerstandswerte nämlich) zu erzielen, ist es allerdings unbedingt notwendig, daß das *Hg* immer unter demselben Druck steht (±0,3 mm); bei variierendem Druck treten Volumänderungen auf, welche den Widerstand merkbar beeinflussen." Da die aus massivem Zelluloid, Porzellan oder dergl. bestehende Meßkammer bei Druckänderungen von einigen mm *Hg*-Druck wohl kaum merkliche Volumänderungen erleiden konnte, bleibt nur die Vermutung übrig, daß die Raumausfüllung der Kammer durch das *Hg* eine variable, somit unvollkommene war.

1) Die Anordnung verhält sich jedoch trotzdem als isotop, da man bei beliebiger Stromrichtung stets die

Wir betrachten daher ein homogenes und isotropes, im übrigen keinerlei beschränkenden Annahme über die Teilchen-Größe und -Gestalt unterworfenes Aggregat zweier Bestandteile mit 50 proz. Volumkonzentration und beschränken uns zunächst der Einfachheit in der Darstellung halber auf das ebene Problem (Fig. 6). Denkt man sich aus der Flächeneinheit des Aggregats einen Streifen von der Breite dx in der Stromrichtung ausgeschnitten, wobei die Größenordnung des Teilchendurchmessers klein gegen die Abmessungen des aus dem Aggregat gebildeten körperlichen Leiters, dx selbst aber wieder klein ist gegen die Größenordnung der Teilchendurchmesser, so schneidet der betrachtete Streifen wegen der Homogeneität der Anordnung gleich viel Material beider Bestandteile aus. Denkt man sich ferner in jedem Punkte, wo die Materialgrenzen den Stromfaden an seinem oberen oder unteren Rande schneiden, Normale zum Stromfaden gezogen, so zerfällt derselbe (A) in rechteckige Streifen, deren jeder nur aus einem Material besteht, (B) in solche rechteckige Streifen, die aus beiden Materialen zusammengesetzt sind, wobei eine Diagonale des Rechtecks die Materialgrenze bildet. Die Zahl der unter (A) und der unter (B) fallenden Teilchen ist genau gleich groß.

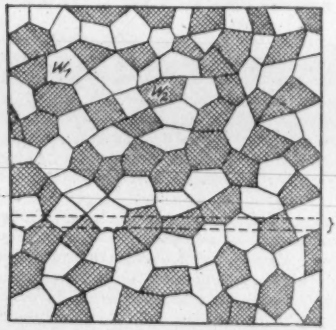


Fig. 6.

Da jedoch dx klein ist gegen die Größenordnung des Teilchendurchmessers Δr (oder wenn Teilchen verschiedener Größenordnung vorhanden sein sollten gegen die kleinste vertretene Größenordnung), so läßt sich zunächst zeigen, daß die Gesamtlänge der Teilchen (B) gegen die der Teilchen (A) verschwindend klein ist. Die Größenordnung der Teilchenlänge (A) stimmt überein mit der des Material-Teilchendurchmessers Δr. Die Teilchen (B) sind von verschiedenster Länge, so daß der Mittelwert der Teilchenlänge zu berechnen ist.

Bezeichnet φ den Spitzwinkel, den die Begrenzung zweier Materialteilchen mit dem sie durchsetzenden Stromfaden einschließt, so wäre zunächst für den Mittelwert der Länge $\bar{l}$ eines Teilchens (B) zu setzen

$$\bar{l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \operatorname{ctg} \varphi \, d\varphi.$$

Da aber wegen der begrenzten Ausdehnung der Materialteilchen größere Werte als

$$dx \operatorname{ctg} \varphi = \Delta r$$

nicht in Betracht kommen, ist die untere Grenze des Integrals der sehr kleine Winkel

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{\Delta r} \quad \text{und}$$

$$\bar{l} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{dx}{\Delta r}}^{\pi/2} dx \operatorname{ctg} \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} dx \, \lg \sin \varphi \Big|_{\frac{dx}{\Delta r}}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} dx \lg \frac{\Delta r}{dx}.$$

Da $\frac{\Delta r}{dx}$ groß gegen $\lg \frac{\Delta r}{dx}$ ist, sobald, wie ja angenommen, $\frac{\Delta r}{dx}$ groß ist gegen 1, so ist die Teilchenlänge von (A) nämlich Δr groß gegen

$$dx \cdot \lg \frac{\Delta r}{dx},$$

d. h. gegen die mittlere Teilchenlänge $\bar{l}$ von (B) und, da die Teilchenzahl übereinstimmt, ist auch die Gesamtlänge der Teilchen (B) klein gegen die Gesamtlänge der Teilchen (A).

Der Gesamtwiderstand des Streifens von der Breite dx ist somit, da er von der Reihenfolge der hintereinander geschichteten Teilchen (A) natürlich unabhängig ist, gleich

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \cdot \frac{1}{dx}.$$

Denkt man sich nun nach dem mehrfach verwendeten Rayleighschen Prinzipe das Aggregat in lauter Streifen von der Breite dx zerlegt, die gegeneinander durch isolierende Zwischenlagen getrennt und parallel geschichtet sind, so erhält man für die Gesamtleitfähigkeit des Aggregats als untere Grenze

Stromfäden zu Paaren so vereinigen kann, daß die einzelnen Paare untereinander sämtlich gleiche Mengen beider Bestandteile durchsetzen.

$$l = \int_0^1 \frac{2}{w_1 + w_2}\, dx$$

und somit für den spezifischen Widerstand die obere Grenze

$$w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}.$$

Analog liefert ein Streifen von der Breite dx senkrecht zur Stromrichtung die Leitfähigkeit

$$\frac{l_1}{2\,dx} + \frac{l_2}{2\,dx}$$

oder den Widerstand

$$\frac{2\,w_1 w_2}{w_1 + w_2} \cdot dx,$$

woraus für die Flächeneinheit des Aggregats durch Hintereinanderschichtung mit Zwischenlagen von verschwindendem Widerstand als untere Grenze für den spezifischen Widerstand folgt:

$$w_u = \int_0^1 \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}\, dx = \frac{2\,w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}.$$

Wegen der postulierten isotropen Beschaffenheit des Aggregats ist die Größe der beiden gefundenen Grenzwerte des Widerstandes von der Stromrichtung unabhängig. Wie man leicht einsieht, ist das obige Ergebnis ohne weiteres auf den räumlichen Fall übertragbar.

Es läßt sich somit allgemein aussprechen: Ein beliebiges homogenes Aggregat von der Volumkonzentration 50 Proz. hat einen Widerstand, der genau zwischen denselben Grenzen gelegen sein muß, wie der eines schachbrettförmigen Aggregats für den Fall Stromrichtung parallel der Seitenkante.

Es erscheint nun nicht mehr als zufällig, sondern als Konsequenz des eben abgeleiteten Satzes, daß, wie wir wissen, alle von Matthiesen ausgeführten Messungen von Legierungen Widerstände ergeben, die zwischen den beiden Grenzwerten des Guertlerschen Modells liegen. Damit ist aber auch erst die volle Berechtigung dargetan, das Guertlersche Modell den Betrachtungen über den Leitungswiderstand von Metallegierungen zugrunde zu legen. Es folgt auch weiters, daß der Widerstand der Legierung niemals einen der beiden festgelegten Grenzwerte erreichen kann; dies wäre nur bei vollständiger Koinzidenz der künstlichen Stromfäden bzw. Äquipotentialflächen mit den am natürlichen Körper vorhandenen möglich. Wie man sieht, ist die von Herrn C. Benedicks in dessen erster Abhandlung als Ergebnis seiner Versuche aufgestellte Behauptung: Im Falle der besser leitende Bestandteil ein zusammenhängendes Ganzes in der Legierung bildet, sei die Leitfähigkeit der Legierung eine lineare Funktion der Leitfähigkeit der die Legierung bildenden Teile — schon aus theoretischen Gründen nicht haltbar. Es muß vielmehr daran festgehalten werden, was sich aus den Messungen von Matthiesen ergibt, deren sorgfältige Auswertung nach der Methode der kleinsten Quadrate und Eintragung in Diagrammkurven sich in meiner Arbeit vom Jahre 1909 findet und was auch schon von Guertler ausgesprochen worden ist: Der Widerstand aller Metallegierungen, die keine Komplikationen durch Mischkristallbildung und dergleichen zeigen, liegt für gleiche Volumteile zwischen den Grenzen

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2\,w_1 w_2}{w_1 + w_2},$$

ohne eine derselben erreichen zu können.

Man sieht ohne weiteres, daß die hier dargelegte Überlegung nicht auf den Fall gleicher Volumprozente beschränkt ist, sondern sich auf ein beliebiges Mischungsverhältnis sinngemäß anwenden läßt. Als obere Grenze des Widerstandes ergibt sich in diesem allgemeinen Falle, wenn ϑ_1 und ϑ_2 die echten Brüche sind, welche die Volumkonzentration der beiden Bestandteile festlegen,

$$w_o = \vartheta_1 w_1 + \vartheta_2 w_2$$

und als untere Grenze

$$w_u = \frac{w_1 w_2}{\vartheta_2 w_1 + \vartheta_1 w_2}$$

wobei

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1.$$

Einen der Grenzwerte w_o und w_u selbst kann eine Legierung, wie aus der Bedeutung dieser Grenzwerte nach dem Rayleigh-Maxwellschen Prinzip hervorgeht, niemals erreichen. Die von uns gewählten, geradlinig geführten Schnitte können ja weder mit den Stromlinien noch Äquipotentiallinien zusammenfallen.

Der Legierungswiderstand mischkristallfreier Legierungen für beliebige Volumkonzentration somit ist allgemein weder durch Linearität des Widerstandes noch durch Linearität der Leitfähigkeit darstellbar, sondern durch eine Funktion, deren Werte innerhalb der durch diese beiden einfachen Funktionen festgelegten Werte liegen.

Über die neuerdings von Herrn C. Benedicks in die Diskussion einbezogene Möglichkeit, es könnten auch die von Matthiesen seinerzeit als mischkristallfrei bezeichneten

Metallegierungen Spuren von Mischkristallbildung aufweisen, zu urteilen liegt naturgemäß nicht im Rahmen dieser Untersuchung. Es muß jedoch festgestellt werden, daß Herr C. Benedicks in seiner ersten ausführlichen Abhandlung diese Möglichkeit nicht einmal andeutungsweise ins Auge faßt und sie erst nachträglich vorbringt, um die ausgezeichnete Übereinstimmung der von mir theoretisch errechneten Werte mit den seinerzeitigen Messungen von Matthiesen zu entkräften.

Zusammenfassung.

Die Arbeit enthält:

1. Eine kurze Zusammenfassung des bisher über den Leitungswiderstand „künstlicher" oder natürlicher Legierungen Veröffentlichten. (Bei Ausschluß sekundärer Effekte.)

2. Die Berechnung einer, ein sehr enges Intervall einschließenden oberen und unteren Grenze des Widerstands für eine neue schachbrettförmige Leiterkonstellation, mit welcher C. Benedicks experimentelle Messungen ausgeführt hat.

3. Eine Zusammenstellung a) der aus den Versuchen mit tesseralen Modellen sich ergebenden Zahlenwerte des Widerstands, b) der theoretisch in der vorliegenden Arbeit festgelegten Grenzwerte für denselben, und schließlich c) der von C. Benedicks nach einer Methode des Verf. berechneten Widerstandswerte.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich:

4. Die von C. Benedicks nach dessen experimenteller Methode gemessenen Widerstandswerte liegen nicht nur außerhalb des von Guertler festgelegten Intervalls, sondern um so mehr außerhalb der für den vorliegenden Fall in dieser Arbeit berechneten theoretisch möglichen Schranken für den Wert des Leitungswiderstands.

5. Die von C. Benedicks nach der Methode des Verf. berechneten Widerstände für das schachbrettförmige Leitermodell dagegen liegen nicht bloß innerhalb des großen Guertlerschen Intervalls, sondern auch innerhalb des hier neu berechneten, wesentlich engeren Intervalls, und zwar praktisch in der Mitte desselben.

6. Es werden für ein beliebiges homogenes und isotropes Aggregat von Leiterpartikeln theoretische Grenzen des Leitungswiderstands berechnet und gezeigt, daß sie für den Fall 50 prozentiger Volumkonzentration mit denen des tesseralen Modells zusammenfallen.

7. Der Widerstand einer Legierung bei Ausschluß sekundärer Erscheinungen (Mischkristallbildung usw.) kann weder lineare Funktion der Widerstände der Bestandteile noch auch reziprok-lineare Funktion ihrer Leitfähigkeiten sein. Der Legierungswiderstand mischkristallfreier Legierungen ist vielmehr eine Funktion, deren Werte für beliebige Volumkonzentration der Bestandteile zwischen den Werten liegen, die von den beiden genannten einfachen Funktionen geliefert werden.

Wien, 15. Mai 1918.

(Eingegangen 22. Mai 1918.)

Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur.

Von E. Grüneisen.

Die kürzlich von mir veröffentlichten Rechnungen[1]) über die Elektrizitätsleitung der Metalle in tiefer Temperatur sollen durch das Folgende ergänzt werden. Es war an einer Reihe von Beispielen gezeigt worden, daß die empirische Beziehung

$$w \sim T \cdot F\left(\frac{T}{\Theta_r}\right) \cdot \frac{C_\rho}{C_v}$$

für einatomige Metalle in einem weiten Bereich tiefer Temperaturen mit großer Annäherung zutreffend ist, wenn man für F die von Debye für die Atomwärme C_v abgeleitete Funktionsform wählt und Θ_r den Widerstandsbeobachtungen anpaßt. Dabei stellten sich Differenzen zwischen den charakteristischen Temperaturen Θ_r und Θ_c (für die Atomwärmen) heraus, die z. T. jedenfalls nicht mehr durch Versuchsunsicherheiten erklärt werden können, also andeuten, daß die Funktion, welche in Wirklichkeit in obige Beziehung einzutreten hat, nicht identisch sein wird mit der Debyeschen Funktion, wenn auch beide offenbar nahe verwandt sind. Der Faktor C_ρ/C_v erwies sich ebenfalls als ungenügend, um den in hoher Temperatur auftretenden Abweichungen von der Proportionalität zwischen w und $T \cdot F$ gerecht zu werden. Allerdings wurde dadurch bei den früher behandelten Metallen die Darstellung von w als Funktion von T, und damit die Bestimmung von Θ_r nicht merklich beeinträchtigt, weil es sich nur um ziemlich geringe Abweichungen handelte, die durch den Korrektionsfaktor C_ρ/C_v auszugleichen waren. Anders liegt die Sache aber beim Eisen und wohl noch einigen anderen Metallen, wie z. B. Nickel. Hier scheint unsere Beziehung zunächst vollständig unzureichend,

1) E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. 20, 36, 1918.

weshalb ich es auch in meinen früheren Mitteilungen vermieden hatte, diese Metalle in Betracht zu ziehen. Es zeigt sich nämlich, daß der Faktor C_p/C_v auch nicht annähernd dem raschen Wachstum des Widerstands in hoher Temperatur genügt, und dieser Umstand macht sich auch in tiefer Temperatur geltend. Es schien deshalb zunächst einmal von Wichtigkeit, C_p/C_v durch eine Temperaturfunktion zu ersetzen, welche sich in hoher Temperatur den Beobachtungen anschließt, und zu untersuchen, ob dadurch vielleicht auch in tiefer Temperatur die Proportionalität des Widerstands mit $T \cdot F(T/\Theta_r)$ deutlicher zutage treten würde. Diese Erwartung erfüllte sich in der Tat. Die Darstellung der Beobachtungen gelang auch für Eisen ziemlich gut mit einem Θ_r-Wert, der nur wenig höher ist als Θ_r.

Die abgeänderte Widerstandsformel lautet:

$$w \sim T \cdot F\left(\frac{T}{\Theta_r}\right) \cdot [1 + a_1 T + a_2 T^2].$$

Von den drei Konstanten kommt Θ_r nur in tiefer Temperatur zur Geltung, weil F in hoher Temperatur konstant wird, a_1 und a_2 kommen hauptsächlich in hoher Temperatur in Betracht. Daß man mit weniger Konstanten auskommen würde, war nicht zu erwarten, da wie bekannt in hoher Temperatur der Widerstand sehr genau einer quadratischen Formel nach t, der vom Eispunkt an gezählten Temperatur, folgt. Diese Darstellung mit zwei Konstanten ist für Platin in hoher Temperatur so genau, daß man annehmen möchte, die quadratische Formel habe nicht nur den Wert einer Interpolationsformel, sondern sei theoretisch begründet. Es wäre deshalb wünschenswert gewesen, unsere Widerstandsformel so abzuändern, daß sie mit steigender Temperatur von selbst in die bewährte einfache quadratische Formel überginge. Meine in dieser Richtung angestellten Versuche sind aber, so einfach die Aufgabe erscheint, vorläufig gescheitert. Auch ist es nicht gelungen, bei Beschränkung auf zwei Konstanten außer Θ_r unsere Formel so zu gestalten, daß sie die Beobachtungen an Platin in hoher Temperatur in gleicher Güte wiedergäbe, wie es die quadratische tut. Als endgültige Lösung kann also unsere Formel nicht angesehen werden. Doch erfüllt sie den Zweck, den Anschluß zwischen den Beobachtungen in tiefer und hoher Temperatur formelmäßig herzustellen und den in tiefer Temperatur maßgebenden Teil der Formel deutlich hervortreten zu lassen.

Als Beispiele für die Anwendung der Formel wurden Blei, Gold, Eisen und Platin gewählt. Die drei erstgenannten Metalle gehören, wie wohl überhaupt die meisten Metalle, zu einer und derselben Klasse, insofern, als die Koeffizienten a_1 und a_2 beide positiv sind. Nur hinsichtlich deren Größe sind erhebliche Unterschiede vorhanden. Eisen hat zehnmal größere Koeffizienten als Gold. Blei nimmt eine Mittelstellung ein. Platin ist Vertreter einer anderen Klasse mit positivem a_1, aber negativem a_2. Die Existenz dieser beiden Klassen ist von der quadratischen Formel her bereits bekannt.

Die Rechnungsergebnisse sind aus den folgenden Tabellen und Kurven zu ersehen. In den Tabellen ist das Verhältnis r des Widerstands bei der abs. Temperatur T zum Widerstand beim Eispunkt (273,1°) nach unsrer Formel berechnet und mit den von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werten dieses Verhältnisses verglichen. Dazu sind jedoch die beobachteten Werte nach der Nernstschen Regel[1]), welche konstanten Zusatzwiderstand voraussetzt, auf „reines" Material umgerechnet, außer beim Blei und dem von Meißner benutzten Gold, welches keinen bisher nachweisbaren Zusatzwiderstand besitzt. Daß bei den anderen Metallproben die Extrapolation auf reines Material mit einer gewissen Unsicherheit behaftet bleibt, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden. Die Extrapolation beruht auf den Annahmen, daß erstens die Regel vom konstanten Zusatzwiderstand mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit gilt, was nicht sicher ist, da Ausnahmen[2]) bekannt sind, und daß zweitens unsre Formel im Bereiche tiefer Temperaturen dem wahren Änderungsgesetz des Widerstands sehr nahe verwandt ist. Diese Annahme wird zwar dadurch gestützt, daß die Formel beim Blei sehr gut bestätigt wird und daß sie bei den anderen Metallen auch für das reinste bisher bekannte Material untere Grenzwerte für den Widerstand liefert. Es hat aber den Anschein, worauf Meißner schon hinwies, daß im Gebiete des Debyeschen T^3-Gesetzes, vielleicht im Zusammenhang mit der Annäherung an den Zustand der Supraleitung, der Widerstand des ideal reinen Metalls langsamer zu sinken beginnt, als es der Formel entspricht. Dieser Punkt bedarf noch der Klärung.

Die Figuren geben in den ausgezogenen Kurven das berechnete Korrektionsglied $[1 + a_1 T + a_2 T^2]$ als Funktion von T, während die Kreuze und Kreise den Beobachtungen entsprechen, und zwar den Quotienten aus den beobachteten und auf reines Material korrigierten Widerständen und den Ausdrücken const.

1) W. Nernst, Ann. d. Phys. (4) **36**, 395, 1911; H. Schimank, ebenda **45**, 706, 1914.

2) Siehe z. B. den Fall des Kupfers (Kristall und kristallinisches Material), E. Grüneisen, l. c. S. 49.

$T \cdot F(T/\Theta_r)$. Dabei ist const. so gewählt, daß für $T = 273{,}1^0$ Rechnung und Beobachtung zusammenfallen.

Als Beobachtungsmaterial dienten Messungen in tiefer Temperatur von Kamerlingh Onnes und Clay[1]), bzw. Keesom[2]), Henning[3]), Meißner[4]), Dewar und Fleming[5]), Schimank[6]), ergänzt durch Messungen in hoher Temperatur von Northrup[7]) für Gold, von Henning[3]) für Platin, von Burgeß und Kellberg[8]) für sehr reines Eisen. Der Zusatzwiderstand des Goldes von Northrup wurde aus der Differenz des spez. Widerstandes gegen denjenigen von Meißners Gold geschätzt, der Zusatzwiderstand des Eisens von Burgeß und Kellberg durch Vergleich des von ihnen gefundenen Temperaturkoeffizienten im Intervall $^0/_{100}{}^0$ C mit dem von Dewar und Fleming. Der so erhaltene Zusatzwiderstand 0,01 für das Eisen von Burgeß und Kellberg erscheint zu hoch, da das Material zu 99,98 Proz. aus Eisen bestehen soll. Tabelle IV gibt deshalb in Klammern auch die unkorrigierten $r_{beob.}$, welche übrigens mit der Formel im ganzen besser stimmen.

Das Eisen von Schimank ist ein wenig reiner geschätzt, als das von Dewar und Fleming. Die Beobachtungen bei 197,8° (Sch.) und 195° (D. u. Fl.) sind nicht miteinander in Einklang zu bringen.

Was nun die Brauchbarkeit unsrer Formel zur Darstellung des Widerstands anbetrifft, so lehren die Tabellen und Figuren folgendes.

Für Blei, Gold und Platin konnten die Θ_r aus meiner früheren Mitteilung beibehalten werden. Überhaupt haben sich die berechneten Widerstände in tiefer Temperatur durch den anderen Korrektionsfaktor nur unbedeutend geändert.

Beim Blei und Gold übersteigt das Korrektionsglied beim Eispunkt die Einheit nur um wenige Prozent (Fig. 1 u. 2). Die Wiedergabe der Beobachtungen durch die Formel (Tab. I u. II) ist von den tiefsten bis zu den höchsten Temperaturen befriedigend, beim Gold also bis zum Schmelzpunkt, wo der Widerstand 10^4 mal größer ist als bei 11° abs.

Tabelle I. Blei.

$\Theta_r = 92$; $a_1 = +0{,}00025$; $a_2 = +0{,}00000027$.

T abs.	$r_{beob.}$ Keesom u. Kam. Onnes	$r_{beob.}$ Meißner	$r_{beob.}$ Henning	$r_{ber.}$
14,93	0,0128			0,0128
20,4	0,0297			0,0299
21,8		0,0350		0,03494
80			0,2593	0,2591
90			0,2961	0,2963
91,7		0,303		0,3027
100			0,3330	0,3335
120			0,4070	0,4077
150			0,5193	0,5199
200			0,7098	0,7104
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
373,1			1,4220	1,4234
373,8		1,423		1,4205

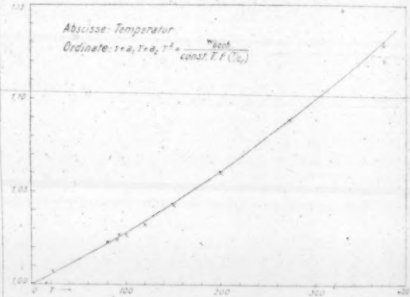


Fig. 1. Blei.

Tabelle II. Gold.

$\Theta_r = 190$; $a_1 = +0{,}00007$; $a_2 = +0{,}00000013$.

T abs.	$\frac{r-0{,}0019}{1-0{,}0019}$ Kam. Onnes u. Clay	$r_{beob.}$ Meißner	$\frac{r-0{,}04}{1-0{,}04}$ Northrup	$r_{ber.}$
11,1	0,00063			0,00063
12,1	0,00081			0,00088
14,3	0,00170			0,00172
18,0	0,00380			0,00427
20,2	0,00621			0,00604
21,5		0,00836		0,00832
57,8	0,132			0,131
68,1	0,177			0,174
75,2	0,207			0,204
90,1	0,270			0,268
91,5		0,276		0,273
169,3	0,592			0,589
273,1	1,000	1,000	1,000	1,000
373,7		1,402		1,405
573,1			2,24	2,25
773,1			3,16	3,18
1073,1			4,77	4,79
1273,1			6,03	6,03

1) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Comm. of Leiden Nr. 99.
2) W. H. Keesom und H. Kamerlingh Onnes, Comm. of Leiden Nr. 147a, 7.
3) F. Henning, Temperaturmessung. Braunschweig 1915, S. 105 (*Pb*); 103 (*Pt* IV) und Schlußtabelle (*Pt*).
4) W. Meißner, Ann. d. Phys. (4) **47**, 1001, 1915.
5) J. Dewar und J. A. Fleming, Phil. Mag. (5) **36**, 271, 1893.
6) H. Schimank, Ann. d. Phys (4) **45**, 706, 1914.
7) E. F. Northrup, Journ. of Franklin Institute **177**, 287, 1914.
8) G. K. Burgeß und J. N. Kellberg, Bull. Bur. of Stand. **11**, 457, 1915.

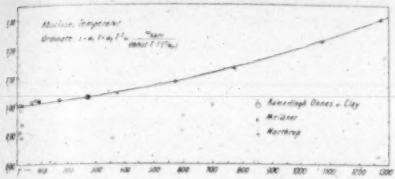


Fig. 2. Gold.

Beim Platin (Fig. 3 u. Tab. III) ist die Darstellung der Beobachtungen in hoher Temperatur (über 200° C) nicht mehr ausreichend, obwohl der Korrektionsfaktor sich nur um einige Prozent von der Einheit entfernt. Es hängt dies mit dem vollständig anderen Charakter der Widerstandsänderung des Platins in hoher Temperatur zusammen, der in dem negativen Koeffizienten a_2 zum Ausdruck kommt.

Für Eisen lehrt Fig. 4, daß die Abweichung von der Proportionalität des Widerstands mit $T \cdot F(T/\Theta_r)$ beim Eispunkt bereits über 30 Proz. ausmacht, so daß ohne Rücksicht auf das Korrektionsglied der Zusammenhang des Widerstands mit $F(T/\Theta_r)$ selbst bei tieferen Temperaturen (der Eispunkt ist) für Eisen bereits eine

Tabelle III. Platin.

$\Theta_r = 230$; $a_1 = +0{,}0003$; $a_2 = -0{,}0000004$.

T abs.	r—0,002 / 1—0,002 Henning	r—0,0033 / 1—0,0033 Henning	r—0,002 / 1—0,002 Meißner	r—0,0101 / 1—0,0101 Kam, Onnes u. Clay	$r$ber.
14,2				$0{,}0006_3$	0,00094
17,9				$0{,}0023_6$	0,00239
20,3	0,0041			0,0041	0,00392
20,7			$0{,}0043_2$		0,00421
56,5				0,1012	0,1020
68,4				0,1512	0,1513
90,1	0,2438				0,2448
90,3				0,2452	0,2457
91,4			$0{,}248_5$		0,2505
197,1	0,6934				0,6934
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
373,1		1,3927			1,3941
373,8			$1{,}396_8$		1,3968
473,1		1,7738			1,7739
573,1		2,1431			2,1326
673,1		2,5008			zu
773,1		2,8466			klein

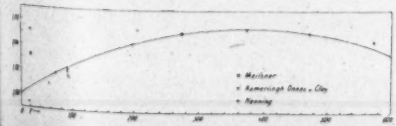


Fig. 3. Platin. (Erklärung s. Fig. 2.)

Tabelle IV. Eisen.

$\Theta_r = 470$; $a_1 = +0{,}0008$; $a_2 = +0{,}0000015$.

T abs.	r—0,0276 / 1—0,0276 Schimank	r—0,030 / 1—0,030 Dewar u. Fleming	r—0,01 / 1—0,01 Burgeß u. Kellberg	$r$ber.
20,4	0,0004			0,0004
67,8		0,043		0,0446
80,6	0,0778			0,0773
90,0		0,108		$0{,}106_2$
195		0,574		0,573
197,8	0,602			0,586
235,7		0,784		0,789
273,1	1,000	1,000	1,000	1,000
371,6		1,633		1,644
373,1			1,641 (1,635)	1,656
469,2		2,414		2,425
571,9			3,52 (3,49)	3,43
671,6			4,75 (4,71)	4,62
774,7			6,26 (6,21)	6,10
872,9			7,93 (7,87)	7,79

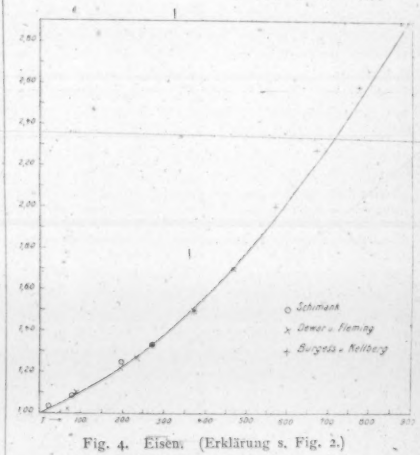


Fig. 4. Eisen. (Erklärung s. Fig. 2.)

tiefe Temperatur!) stark verschleiert ist. Setzt man jedoch das Korrektionsglied wie in unsrer Formel an, so läßt sich der Widerstand reinen Eisens zwischen 20° und 873° abs., also bis in die Nähe der Umwandlungstemperatur, leidlich gut darstellen. Vor allen Dingen ist wichtig, daß die so bestimmte charakteristische Temperatur des Eisens, $\Theta_r = 470$, nur etwa um 10 Proz. höher sein dürfte, als die für die Atomwärme charakteristische Temperatur, für die man bisher noch keinen genauen Wert hat.

Zum Schluß noch ein Wort über die Bedeutung der charakteristischen Temperatur Θ_r. Es hatte sich gezeigt[1]), daß die Größen Θ_r

1) E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, 53, 1918.

bzw. bestimmte Bruchteile derselben für manche Beziehungen zwischen den Metallen die Rolle von korrespondierenden Temperaturen zu spielen scheinen. Es ergab sich z. B., daß die auf ein Atom bezogenen el. Leitfähigkeiten $A = \varkappa v$ (v = Atomvolumen), wenn man sie bei solchermaßen definierten korrespondierenden Temperaturen nimmt, eine deutliche Beziehung zum periodischen System der Elemente zeigen, derart, daß diese A von maximalen Werten in der 1. Gruppe zu minimalen in der o. bzw. 8. Gruppe des Systems abfallen. Nach dem Bau unsrer Widerstandsformel wäre eine so maßgebende Rolle der Θ_r nicht ohne weiteres zu erwarten, weil T keineswegs nur in der Quotientenbildung T/Θ_r vorkommt. Es liegt deshalb die Frage nahe, ob nicht in der Formel auch das als Faktor von F auftretende T durch T/Θ_r zu ersetzen sei, wodurch bezüglich der Darstellung der Widerstandsbeobachtungen nichts geändert wird. In meiner letztgenannten Mitteilung hatte ich in der Tat diese Annahme gemacht. Durch sie würde für das Wärmeleitvermögen λ ebenfalls eine Forderung eingeführt. Da nämlich bei gewöhnlicher Temperatur, wo F praktisch konstant ist, $\lambda (\varkappa T)$ einer universellen Konstanten nahe gleich, also unabhängig von Θ_r ist, so müßte in diesem Temperaturgebiet auch $\lambda \sim \Theta_r$ sein, damit sich bei der Quotientenbildung aus λ und $\varkappa T \sim \Theta_r F$ das Θ_r heraushebt. Eine Entscheidung über die aufgeworfene Frage kann wohl nur eine elektronentheoretische Begründung unsrer Widerstandsformel erbringen, die noch aussteht. Vorläufig liegt ein zwingender Grund zur Einführung von Θ_r im Nenner der rechten Seite der Formel nicht vor. Auch für die Ableitung der Beziehung zwischen der atomaren Leitfähigkeit bei korrespondierenden Temperaturen und der Benedicksschen „Leitungskapazität“[1]) ist diese Ergänzung nicht nötig.

1) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916; E. Grüneisen, l. c. S. 53.

(Eingegangen 1. Juni 1918).

Über spiegelnde Flächen negativer Krümmung.

Von Paul Selényi.

(Nachtrag zu meiner Arbeit gleichen Inhalts in dieser Zeitschr. 19, 105, 1918.)

Herr K. Martin, Direktor der E. Busch-A.-G. Optische Industrie, Rathenow hat mich gütigst aufmerksam gemacht, daß er über eine ähnliche Spiegelfläche bereits im Jahre 1907 in der Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, S. 314 berichtet hat. Die neue Spiegelfläche wurde technisch angewandt zur Konstruktion eines photographischen Bildsuchers für Aufsicht, der höhen- und seitenrichtige Bilder ergibt (Sellar-Sucher); auf die Theorie der Spiegelung wurde nicht näher eingegangen. — Mit einem solchen, von der Firma mir zur Verfügung gestellten Sucher, welcher infolge seiner schwächeren Krümmung (Fokaldistanz 50 mm) viel weniger stark verkleinerte Bilder liefert wie mein Exemplar, könnten die früheren Beobachtungen leichter wiederholt und in einem Punkte — betreffend die Lage der Bilder relativ zum Spiegel — auch ergänzt werden; diese Ergänzung soll hier mitgeteilt werden.

Es wurde nämlich festgestellt[1]), daß die Bilder von einem solchen Spiegel weder reell, noch virtuell sind und daß sie sich weder vor, noch hinter dem Spiegel lokalisieren lassen. Dieser Satz ist aber nur richtig, solange man die Bilder einaugig betrachtet; d. h. solange man bei der Lokalisation allein auf die Akkommodation angewiesen ist. Betrachtet man die Bilder mit beiden Augen, so gibt der Stereoskopeffekt ein anderes, viel empfindlicheres Mittel, um die Bilder lokalisieren zu können. Man verfährt am einfachsten so, daß man einen Punkt auf dem Spiegel selbst fixiert und dann, das eine Auge abwechselnd schließend, feststellt, welches von den natürlich doppelt gesehenen eigenen Gesichtsbildern verschwindet. Liegt das verschwindende Bild auf der gleichen Seite, wie das geschlossene Auge, so erscheint das Bild zweiaugig betrachtet, hinter, im entgegengesetzten Falle vor dem Spiegel. Dieses experimentelle Kriterium auf einen Spiegel negativer Krümmung angewandt, ergibt folgendes interessante Resultat: Hält man den Spiegel so, daß die Verbindungslinie der Augen in die Ebene der konkaven Hauptkrümmung fällt, dann liegt das (aufrechte) Bild vor dem Spiegel; fällt die Verbindungslinie der Augen in die Ebene der konvexen Hauptkrümmung, so erscheint das — diesmal verkehrte — Bild hinter dem Spiegel. — Dieses Resultat, welches aus der Betrachtung des Strahlenganges sich leicht ableiten läßt, ist mit Hilfe des erwähnten Suchers leicht festzustellen. Bei diesem ist nämlich der Abstand Spiegel—Gesichtsbild so beträchtlich, daß beim flüchtigen Draufsehen — wo man unwillkürlich den Spiegel selbst fixiert — das Gesichtsbild unwillkürlich doppelt erscheint; bei meinem Exemplar mußte ich einen kleinen schwarzen Fleck als Fixierpunkt auf der Spiegelfläche an-

1) loc. cit. S. 108.

bringen, um die erwähnten Beobachtungen ausführen zu können.

Budapest, II. Phys. Institut der Universität, den 26. Mai 1918.

(Eingegangen 2. Juni 1918.)

Die Wärmedämmerung.

Von Otto Meißner.

Man redet gelegentlich in meteorologischen Kreisen von einer „Wärmedämmerung", die darin bestehen soll, daß die Lufttemperatur schon vor Sonnenaufgang etwas zu steigen beginnt, das Temperaturminimum also früher eintritt, als die Sonne aufgeht. Eine zahlenmäßige Prüfung dieser Erscheinung habe ich nun an den Beobachtungen des Kgl. Meteorologischen Observatoriums auf dem Telegraphenberge bei Potsdam für die 5 Jahre 1908—1912 vorgenommen. Dabei sind zunächst aus den Tabellen mit den zweistündigen Wolkenbeobachtungen alle Tage mit geringer Morgenbewölkung (bis höchstens $^3/_{10}$ leichtes Gewölk in der Zeit von 2 Uhr früh bis eine Stunde nach Sonnenaufgang) herausgesucht. Für sie wurde dann aus den stündlichen Temperaturwerten das Minimum, oder vielmehr an seiner Steile der als solches durch den Druck markierte tiefste Stundenwert, und zum Vergleich die Zeit des Sonnenaufgangs des betreffenden Tages hingeschrieben. Ersteres ist zwar ungenau, doch konnte man bei der Unregelmäßigkeit des Temperaturverlaufs eines einzelnen Tages nicht anders verfahren. Zur genauen Feststellung des Zeitpunktes des Eintritts des wirklichen Minimums wäre eine Reproduktion der Thermographenkurve erforderlich, wie sie beispielsweise für Hamburg in den Wetterkarten der Seewarte gegeben wird; für Potsdam liegt eine solche leider nicht vor. Der Fehler der Differenz: Temperaturminimum — Sonnenaufgang beträgt also im Einzelfalle, von Abnormitäten abgesehen, höchstens 30 Minuten, welcher Betrag sich bei 25 Werten bereits auf 0,1 h = 6 Minuten reduziert, was auch für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ausreicht. Natürlich wurde in allen Fällen, wo es abends kälter war als morgens, nicht das im Buch markierte, sondern das (relative) Morgenminimum genommen. Waren mehrere Stundenwerte gleich tief, so wurde, je nach dem Charakter des Temperaturverlaufs, das Mittel oder ein bestimmter, dem wahren Minimum voraussichtlich am nächsten liegender Wert genommen. Trotzdem zeigten sich auch noch so Abnormitäten, indem, allerdings fast nur im Winter, das Minimum oft mehrere Stunden vor Sonnenaufgang eintrat. Aus der Vergleichung aller Werte folgt, daß es tatsächlich Abnormitäten sind, die zweifellos durch stärkere Luftbewegung hervorgerufen werden. Man kann in solchem Falle aber kaum von einer „Wärmedämmerung" reden: es handelt sich vielmehr um einen Temperaturanstieg infolge des Eintretens wärmerer Luftströmungen, wie er im Winter gelegentlich zu jeder beliebigen Tageszeit eintreten kann. Ich habe deshalb in Tabelle I einmal alle Tage aufgeführt, dann aber auch nur die „normalen", unter Fortlassung der eben erörterten Fälle.

Δ bedeutet die schon erwähnte Differenz: Tagesminimum — Sonnenaufgang, m. Dat. das mittlere Datum der zur Verwendung gelangten Tage, das sich von dem wirklichen mittleren Monatsdatum (15,5 bzw. 16, außer beim Februar, wo es 14,5 ist) nur um wenige Tage unterscheidet. Da die Sonnenaufgänge in wahrer, die Temperaturwerte dagegen in mittlerer Ortszeit angegeben sind, hätte eigentlich bei jeder einzelnen Differenz die Zeitgleichung berücksichtigt werden müssen. Das ist aber, weil zu umständlich, nicht geschehen, vielmehr ist die Zeitgleichung erst an die Mittelwerte, entsprechend dem mittleren Datum angebracht worden, was zwar nicht ganz streng, aber hier völlig ausreichend ist.

Im letzten Drittel der Tabelle steht der, auf mittlere Ortszeit reduzierte mittlere Sonnenauf-

Tabelle I.

1908—1912		Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
alle Tage	Anzahl	26	25	37	44	41	45	41	39	40	39	22	24
	Δ	−24m	−69m	+ 2m	+ 3m	+23m	+25m	+22m	+19m	+ 8m	+10m	−44m	−101m
	m. Dat.	18,0	12,4	17,2	15,7	14,5	12,8	17,4	14,0	15,4	13,2	14,0	13,0
normale Tage	Anzahl	22	17	35	41	40	45	40	37	36	37	16	14
	Δ	0m	−17m	+12m	+14m	+27m	+26m	+26m	+27m	+26m	+15m	+16m	−13m
	m. Dat.	19,0	16,8	18,1	16,4	14,3	12,8	17,2	14,5	15,9	13,3	15,5	11,5
⊙Aufg.	m. O. Z.	8h 5m	7h 19m	6h 18m	5h 6m	4h 7m	3h 41m	3h 59m	4h 44m	5h 33m	6h 27m	7h 22m	8h 4m
period.	Min.	7 29	6 49	6 18	5 13	4 29	4 16	4 28	4 52	5 42	6 38	7 22	7 49
	Δ	−36	−30	0	+7	+22	+35	+29	+8	+9	+11	0	−15

Tabelle II.

Δ für	c_0	c_1	φ_1	c_2	φ_2	μ_1^2	μ^2_2
alle Tage	−10,4 ±7,2	46,2 ±11,5	181°	14,6 ±12,2	153°	631	632
normale T.	+13,3 ±2,4	18,4 ± 3,5	199	5,2 ± 3,7	225	67	69
period. Min.	+ 3,4 ±3,3	26,6 ± 4,6	189	10,1 ± 3,6	258	117	56

gang des Monats (der natürlich sich vom Sonnenaufgang des Monatsmittels nur wenig unterscheidet), darunter das fünfjährige Mittel der Eintrittszeiten des sogenannten „periodischen Minimums", wobei aber in den Wintermonaten verschiedene Einzelwerte außer Betracht bleiben mußten, da das betr. Monatsmittel infolge des Einflusses starker Temperaturanomalien einzelner Tage sehr entstellt war.

Alle drei Differenzen zeigen nun einen ausgesprochenen jährlichen Gang, dessen Darstellung durch eine Cosinusreihe in Tabelle II wiedergegeben ist.

Dabei sind der Einfachheit halber, und weil eine weitergehende Genauigkeit nicht sachentsprechend schien, alle Monate mit gleichem Gewichte genommen und ist auch von der Berücksichtigung des Umstandes Abstand genommen, daß das wahre Datum etwas von dem hier gebrauchten mittleren abwich. Es ist zu lesen:

$$\Delta = c_0 + c_1 \cos(30\,m - \varphi_1) + c_2 \cos(60\,m - \varphi_2),$$

mit $m = {}^1/_2$ für Januar usw. Die $^1/_2$jährige Periode ist, nach der Abnahme des mittleren Fehlerquadrates zu urteilen, kaum reell. Die Phase des jährlichen Gliedes stimmt in allen drei Fällen gut überein. Man kann somit, unter Außerachtlassung der durch das Eintreten warmer Luftströmungen gestörten Temperaturverhältnisse klarer Wintertage sagen:

> Die Differenz zwischen Temperaturminimum und Sonnenaufgang hat, sowohl im Mittel wie nur für klare Nächte, einen deutlichen jährlichen Gang. Und zwar tritt in klaren Nächten vom Mai bis zum September das Minimum $^1/_2$ Stunde, in den Frühjahrs- und Herbstmonaten $^1/_4$ Stunde nach Sonnenaufgang ein, nur im Winter etwa 10 Minuten früher. Von einer „Wärmedämmerung" ist somit nichts zu bemerken.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, daß der Telegraphenberg, obwohl er nur etwa 50 m über dem Haveltale liegt, doch ein ausgesprochenes „Höhenklima" besitzt, das sich vor allem in viel zu geringer Abkühlung gerade in den hier in Frage kommenden klaren Nächten, auch durch eine merkliche Verspätung der Eintrittszeiten des aperiodischen (und natürlich auch des periodischen) Temperaturmaximums auszeichnet, weshalb man mit der Verallgemeinerung der Ergebnisse, wie sie diese größte preußische Station liefert, immer sehr vorsichtig sein muß. Bei der in klaren Nächten mit schwacher Luftbewegung eintretenden Stagnation der untersten, kalten Luftschichten ist aber anzunehmen, daß die Verspätung des Eintrittes des Temperaturminimums im Tale eher noch erheblich größer ist als oben auf der Station, so daß die in der Arbeit ausgesprochenen Schlüsse betreffend die Nichtexistenz einer Wärmedämmerung ihre volle Gültigkeit behalten dürften.

Potsdam, 11. Juni 1918.

(Eingegangen 12. Juni 1918.)

Berichtigung [1].

Von R. Malmström.

Die in dem Aufsatz „Zur Theorie der Elektrodynamik" [2] aufgestellte Formel für die Wechselwirkung zweier Elektronen enthält ein durch Entwicklung des Riemannschen Gesetzes entstandenes Glied mit der x-Komponente

$$-\frac{e\,e'}{r}\,\frac{a_x' - a_x}{c^2},$$

welches, als umgekehrt proportional der ersten Potenz des Abstandes, neben dem letzten Gliede derselben Formel (dem Lichtvektor) bei großen Abständen nicht vernachlässigt werden darf. Da dieses Glied eine in der Richtung der relativen Akzeleration wirkende Kraft darstellt, würden sich daraus bei der Anwendung auf die Optik mit Ausnahme des Falles, daß die Schwingungen senkrecht zur Verbindungslinie erfolgen, longitudinale Schwingungen ergeben, und somit eben diese Anwendung unmöglich gemacht werden.

Es sei erlaubt hier kurz anzudeuten, wie dieser Fehler hätte vermieden werden können, und auf welchem Wege wenigstens eine Möglichkeit besteht, die Theorie zu verbessern, obwohl jetzt keine befriedigenden Resultate vorgelegt werden können. Wir gehen wieder von der Hypothese aus, daß jedes Elektron einen

1) Auszug aus einem in „Öfversigt af Finska Vetenskaps societetens Förhandlingar", Bd. LX, 1917—1918, Afd. A, No. 10 erschienenen Aufsatz.

2) Diese Zeitschr. 18, 454, 1917.

Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt und sagen: wenn die Bewegung des Elektrons beschleunigt ist, so entsteht in dem Äther desselben eine Erregung, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt und deren x-Komponente

$$\frac{e}{r}\frac{[a_r]\cos(r,x) - [a_x]}{c^2} \qquad (1)$$

ist. Die auf ein zweites Elektron e' ausgeübte Wirkung ist dann erstens gleich diesem Ausdruck multipliziert mit e'. Zweitens aber nehmen wir an, daß von dem Punkte aus, wo das Elektron e sich augenblicklich in dem Äther des zweiten Elektrons befindet, eine Wirkung ausgeht, die sich in diesem Äther mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Wird diese Kraft umgekehrt proportional der zweiten Potenz des Abstandes angenommen, so kann sie bei großen Abständen neben (1) vernachlässigt werden. Da der Ausdruck (1) den Lichtvektor darstellt, so wird hierdurch die Anwendung der Theorie auf die Optik möglich gemacht.

Der Ausdruck für den zweiten Teil der gegenseitigen Wirkung muß jetzt so gewählt werden, daß er, für kleine Abstände nach Potenzen von $\frac{r}{c}$ entwickelt, die Wirkung zweier Elektronen richtig wiedergibt.

Es sei R der Abstand der Elektronen zu der Zeit, als die in dem Äther des Elektrons e' sich fortpflanzende Wirkung von e ausgeht, um bei der Zeit t zum Elektron e' zu gelangen. Wenn wir dann, in Analogie mit dem Verfahren von W. Ritz, diese Wirkung in eine nach R, sowie eine nach der Relativgeschwindigkeit zur Zeit $t - \frac{R}{c}$ gerichtete Komponente zerlegen und beide mit Funktionen von $\frac{u_r}{c}$ und $\frac{u^2}{c^2}$ multiplizieren, so ist es leicht diese Funktionen so zu bestimmen, daß die genannte Bedingung erfüllt wird. In dem oben (Anm. 1) zitierten Aufsatz sind solche Formeln aufgestellt, welche für kleine Abstände das Webersche und das Riemannsche Gesetz ergeben. Da diese doch nur den Charakter empirischer Formeln haben und außerdem nicht die Versuche über β-Strahlen richtig wiedergeben, so möge diese Andeutung genügen.

Zu einfacheren Formeln gelangt man durch die Annahme, daß alle Erregungen sich im Äther des emittierenden Elektrons fortpflanzen. Die Formeln enthalten dann nur den augenblicklichen Abstand, und es gelingt auch, dieselben in Einklang mit den Versuchen über β-Strahlen zu bringen. Die Schwierigkeit liegt nur darin, in befriedigender Weise Glieder einzuführen, welche für kleine Abstände das Glied $-\frac{ee}{r}\frac{a_x' - a_x}{ce}$ ergeben[1]).

Zum Schluß sei noch zu der hier zugrunde gelegten Ätherhypothese die Bemerkung gemacht, daß man sie selbstverständlich nicht auszusprechen braucht, sondern rein phänomenologisch, ohne überhaupt vom Äther zu reden, die Sache so ausdrücken kann, daß von den oben betrachteten zwei Wirkungen zwischen den Elektronen e und e' die erste für ein mit dem Elektron e (Sender), die zweite für ein mit dem Elektron e' (Empfänger) bewegliches Koordinatensystem gilt oder daß bei der zuletzt besprochenen Annahme, alle Wirkungen in einem mit e beweglichen Koordinatensystem vor sich gehen.

1) l. c. (Anm. 1, S. 388).

(Eingegangen 26. Juni 1918.)

BESPRECHUNGEN.

H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. 4. Band. Technische Elastizitätslehre. gr. 8°. XXIV. u. 692 S. mit 229 Abbildungen. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1913. M. 19.—, geb. M. 20.—

Ebenso wie die drei vorausgehenden Bände bildet auch dieser vierte eine höchst wertvolle Bereicherung der einschlägigen Literatur. Eine ungemein große Fülle von Aufgaben wird hier behandelt. Dabei geschah die Auswahl derselben nicht, wie es vielfach üblich ist, mit Rücksicht auf möglichst einfache oder elegante Lösbarkeit, sondern sie entspricht durchaus den Bedürfnissen der Praxis. Trotz der erheblichen mathematischen Schwierigkeiten, welche eine große Anzahl von behandelten Problemen mit sich bringt, hat es der Verfasser doch verstanden, durch eine klare, logisch durchsichtige Darstellung dem Leser über diese Schwierigkeiten hinwegzuhelfen. Zur Erleichterung des Studiums trägt auch wesentlich bei, daß er bei jedem Kapitel mit leichteren Aufgaben beginnt und so den Leser allmählich auf die schwierigeren Fragen vorbereitet. Daß bei der außerordentlich großen Fülle von Untersuchungen auch kleine Unrichtigkeiten untergelaufen sind, wie bei der Behandlung der Stabilität der Lavalturbine ist leicht erklärlich, sie fallen aber gegenüber dem sonstigen wertvollen Inhalt kaum ins Gewicht. Dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend ist der Stoff mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Behandlung in zwei Teile getrennt. Im ersten Teile werden im wesentlichen solche Aufgaben behandelt, welche auf ebene Spannungszustände zurückgehen und sich mit verhältnismäßig einfachen Mitteln lösen lassen: Zug-, Druck- und Verdrehungselastizität, Biegung gerader und krummer Stäbe, Knick- und Kipperscheinungen. Übrigens sind auch in diesem ersten Teile

bereits recht komplizierte Probleme bearbeitet, wie z. B. die Torsion von Hohlzylindern mit Zwischenstegen. Im zweiten Teile wird zunächst die allgemeine Elastizitätstheorie mit räumlichen Spannungs- und Dehnungszuständen entwickelt. Zur Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichungen wird ein vom Verfasser verallgemeinertes Ritzsches Verfahren angewandt. Als Anwendung werden dann die Biegung von ebenen Platten und weiter ebene und achsensymmetrische Probleme behandelt (rotierende Scheiben und Trommeln, Temperaturspannungen in Hohlzylindern und ähnliches). Den Schluß bildet ein Abriß der geschichtlichen Entwicklung der Elastizitätslehre, in dem übrigens noch manche interessante Probleme zur Sprache kommen. Das Buch ist zwar in erster Linie für Ingenieure bestimmt, aber es ist auch für den Physiker von größtem Interesse einmal wegen der großen Bedeutung, welche die Elastizitätslehre auch für ihn besitzt, insbesondere aber auch wegen der Art und Weise, wie hier die mathematische Behandlung oft recht schwieriger Aufgaben durchgeführt ist. Betz.

R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. 8°. VIII u. 152 S. mit 121 Abbildungen. Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Jahnke. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 4.80, geb. M. 5.40.

In diesem Leitfaden gibt Verf. die Vorlesung wieder, die er seit einer Reihe von Jahren an der Technischen Hochschule in Stuttgart regelmäßig hält. In einem ersten Abschnitt behandelt er das graphische Rechnen im engeren Sinne, Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren, die Darstellung von Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen und die Auflösung von Gleichungen. In einem zweiten Abschnitt folgt die graphische Infinitesimalrechnung, graphisches Integrieren und Differenzieren und die Integration von Differentialgleichungen. Verf. ist als einer der ersten Fachleute dieses Gebietes, das in mehreren Richtungen durch seine Arbeiten eine Bereicherung erfahren hat, wohl berufen darüber zu schreiben und sein Leitfaden wird dankbar aufgenommen werden. Er wird dazu beitragen diesem Teil des mathematischen Unterrichts endlich die Geltung zu erringen, die ihm zukommt. Gerade vom Standpunkt des Physikers sollte gefordert werden, daß der mathematische Unterricht, neben den üblichen mathematischen Vorlesungen, einerseits die numerischen, andrerseits die graphischen Methoden pflegen sollte. Besonders die Beherrschung der graphischen Integration und Differentiation gehört meiner Überzeugung nach zum unumgänglichen Rüstzeug jedes exakten Naturforschers, weil er es meistens mit empirischen Funktionen zu tun hat, für die sich die graphische Behandlung als die gegebene erweist.

C. Runge.

Walther Estorff, Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke. Lex.-8. 35 S. mit 20 Abb. u. 1 Tafel. Heft 199 der „Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". Herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure. Berlin, Julius Springer in Kommiss. 1917. 1 M.

Da die in der Hochspannungsmeßtechnik vielfach verwendeten Meßfunkenstrecken meist nur rein empirisch geeicht sind, so unternimmt es der Verf., die Kugelfunkenstrecken einer rechnerischen Behandlung zu unterziehen. Mit Hilfe der Methode der elektrischen Bilder berechnet er die Kapazität eines Kugelkondensators, sowie die Potentialverteilung und die Feldstärke auf der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, speziell an der Oberfläche der Elektroden. Sodann werden bei den verschiedensten Kugeldurchmessern und -abständen Kapazität und Potentialverteilung experimentell gemessen, und zwar, um den Einfluß der Zuleitungen eliminieren zu können, mittels der von Kohlrausch angegebenen Methode der Widerstandsmessung in Elektrolyten. Schließlich werden noch die Funkenspannungen gemessen für verschiedene Schlagweiten und Kugeldurchmesser. Da nun im theoretischen Teil ein Zusammenhang gefunden wurde zwischen Spannungsdifferenz der beiden Kugeln und Feldstärke an der Oberfläche einer von ihnen auf der Mittellinie, so läßt sich jetzt ohne weiteres diese Feldstärke für jede Schlagweite bei der Funkenspannung berechnen; es ist dies die sogenannte Festigkeit der Luft bzw. des zwischen den Elektroden befindlichen Dielektrikums. Es zeigt sich, daß die Lufttestigkeit nur abhängig ist vom Durchmesser der Elektroden und so gut wie unabhängig von deren Abstande. Ist andrerseits die Luftfestigkeit als Funktion des Kugeldurchmessers bekannt, so läßt sich demnach für jeden Kugeldurchmesser und jede Schlagweite die Funkenspannung berechnen. An ein paar Beispielen wird dies durchgeführt.

Die Messung der Funkenspannungen geschieht mit Hilfe des vom Verf. konstruierten „Oszilloskops". Es ist dies ein Apparat, der sich vom Oszillographen nur dadurch unterscheidet, daß die Spiegelablenkung nicht auf einer rotierenden Fläche zu einer Kurve ausgezogen, sondern daß der Lichtzeiger einfach auf eine feststehende Mattscheibe reflektiert wird und hier, entsprechend der Spiegelablenkung, zum Bande verbreitert erscheint. Die Hochspannung wird mittels eines Transformators erzeugt, und die Spannungsschleife liegt an dessen Niederspannungswicklung. Werden die Ausschläge des Lichtzeigers auf der Mattscheibe mit Gleichspannung geeicht, so läßt sich für jede Schlagweite der Maximalwert der Niederspannung und hieraus, durch Multiplikation mit dem Übersetzungsverhältnis des Transformators, derjenige der Hochspannung, d. h. die Funkenspannung, angeben. Nachdem dies an einer einzelnen Meßreihe illustriert worden ist, wird die Messung für die verschiedenen Schlagweiten und Kugeldurchmesser durchgeführt. Merkwürdigerweise gibt der Verf. hierbei lauter Effektivwerte der Spannung an. Ganz abgesehen davon, daß, wie er selber gesagt hat, die Maximalwerte das einzig Interessierende sind, läßt sich weder einsehen, wie diese Effektivwerte gefunden wurden, noch was man sich überhaupt unter einer „effektiven Funkenspannung" vorzustellen hat. Bei sinusförmig verlaufender Spannungskurve ist ja der Maximalwert das $\sqrt{2}$-fache der Effektivspannung. Aber selbst, wenn eine Wechselstrommaschine eine reine Sinusspannung liefert, so dürfte doch unter keinen Umständen auf der Sekundärseite eines von ihr betriebenen Transformators die Spannung sinusförmig verlaufen bei Belastung mit einer Funkenstrecke. Hierfür ist demnach das Verhältnis von effektiver zu maximaler Spannung durchaus unbekannt. Sollte andrerseits das Oszilloskop nur die effektiven Spannungen der Primärwicklung angeben, so kann man hieraus die maximalen Spannungen der Sekundärseite überhaupt nicht erschließen. — Endlich gibt der Verf. noch an, daß er „aus praktischen Gründen" eine

Bestrahlung der Funkenstrecke zur Aufhebung des Entladeverzuges unterlassen habe. Da er die Gründe selber nicht anführt, so wird man über ihre Berechtigung und über die Zweckmäßigkeit dieser Maßregel im Zweifel sein dürfen. Denn nur wenn der Entladerverzug aufgehoben ist, kann man auf ein regelmäßiges und präzises Ansprechen der Funkenstrecke rechnen, während es sonst durchaus nicht sicher ist, ob die gemessenen Spannungen wirklich die Funkenspannungen sind, oder ob sie nicht hiervon mehr oder minder stark abweichen und z. B. sich mit der Zahl der Funken und der Perioden pro Sekunde ändern.

Die Arbeit bringt einen wertvollen Beitrag zur Meßtechnik hoher Spannungen. Doch liegt ihr Wert hauptsächlich darin, daß ein exakter Zusammenhang zwischen Luftfestigkeit, Funkenspannung und Schlagweite gegeben wird. Den Meßresultaten des experimentellen Teiles gegenüber dürfte dagegen aus den angeführten Gründen noch einige Vorsicht geboten sein. V. Pieck.

F. M. Jaeger, Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. gr. 8. XII u. 333 S. mit 170 Abbildungen. Amsterdam, Publishing Company „Elsevier". 1917.

Der Verf. macht es sich in dem vorliegenden inhaltsreichen Buche zur Aufgabe, den studierenden Mathematiker und Naturwissenschaftler auf das Wesen und die Anwendung des Symmetrieprinzips hinzuweisen, das nicht nur für die Beschreibung der Gestaltung der Naturobjekte gültig ist, sondern auch mit dem physikalischen und chemischen Verhalten derselben auf das Engste zusammenhängt. Dementsprechend wird in den vier ersten Kapiteln des Werkes eine allgemeine Darstellung der Grundlagen und Lehrsätze der Symmetrielehre gegeben, wobei es dem Verf. weniger darauf ankam, die hier vorliegenden Probleme möglichst erschöpfend zu erörtern, als vielmehr das Wesentliche des Gegenstandes herauszugreifen und an zahlreichen Beispielen aus der Morphologie der Kristalle sowie der Pflanzen- und Tierwelt zu veranschaulichen. Der zugrunde liegende Gedankengang deckt sich im wesentlichen mit dem von Schoenflies eingeschlagenen Wege, doch sind gelegentlich auch die Anschauungen von Möbius, Viola, Boldyrew, Fedorow u. a. mitgeteilt; die Symmetrie-Symbole werden teils nach Schoenflies' Bezeichnungsart, teils nach der von Saurel gehandhabt. Vom physikalischen Standpunkte aus beanspruchen die Kapitel 5 u. 6 besonderes Interesse; in dem ersteren werden die 32 kristallographisch möglichen Symmetriegruppen besprochen und dann diejenigen Symmetrien erörtert, welche Achsen der Isotropie besitzen. Die Symmetrien der Ursache und der Wirkung, des magnetischen und des elektrischen Feldes, der Lichtbewegung usw. werden eingehend abgehandelt; es erhellt insbesondere bei der Besprechung des Hallschen Phänomens sowie des Torsionseffektes, den ein vom elektrischen Strome durchflossener Eisendraht im magnetischen Felde zeigt (vgl. Matteuci-Wiedemann), wie wichtig die Anwendung des Symmetrieprinzips auf die physikalischen Erscheinungen sein muß. Im 6. Kapitel interessiert uns eine kurze aber anschauliche Darstellung der Raumgittertheorie; es wird in sehr lehrhafter Weise gezeigt, wie aus den Bravaisschen Vorstellungen notwendigerweise die allgemeine Gittertheorie von Schoenflies und Fedorow sich entwickeln mußte. Durch die Laue-Braggschen Untersuchungen ist diese bekanntlich in hervorragender Weise bestätigt worden, und mit Recht wird ihren so sehr wichtigen Ergebnissen in dem vorliegenden Buche besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Unter anderem wird auch von den neuesten Untersuchungen Debyes über das Raumgitter des Graphits berichtet, aus welchen wir einen sehr wertvollen Einblick in die Unterschiede des Feinbaues von Diamant und Graphit gewinnen, insbesondere auch das vordem so schwierige Problem des dreiwertigen Kohlenstoffatoms verstehen lernen. Das 7. Kapitel des Buches beschäftigt sich mit dem Aufbau mimetischer Kristallgestalten, insbesondere auch mit der Reuschschen Theorie der Entstehung zirkularpolarisierten Lichtes bei der Durchstrahlung eines einachsigen Kristalles in Richtung der Hauptachse. Daß manchmal, wie z. B. beim Strychninsulfat, sogar in dem Röntgendiagramm die mimetisch-hochsymmetrische Kristallstruktur zum Ausdruck zu kommen scheint, während in zahlreichen anderen Fällen die geringere Symmetrie der Kristallbausteine in dem Diagramm zutage tritt, erscheint uns besonders bemerkenswert. Das 8. und 9. Kapitel enthält eine ausgezeichnete Darstellung der Theorie der optisch aktiven Körper, die nach den Anschauungen van't Hoffs und Lebels durch das Auftreten asymmetrischer Kohlenstoffatome im chemischen Molekül gekennzeichnet sind; vom Standpunkt der allgemeinen Symmetrielehre aber müssen diese Substanzen als solche aufgefaßt werden, deren Moleküle höchstens Symmetrieelemente der ersten Art, d. h. einfache Deckbewegungsachsen enthalten, nicht aber Elemente zweiter Art, wie Drehspiegelungsachsen, Symmetrie-Ebenen oder -Zentren. Daß in der Tat die Anordnung der elementaren Bestandteile in den Molekülen allein in Frage kommt und nicht etwa nur ein „asymmetrisches" Zentralatom, haben die Untersuchungen an komplexen Kobaltsalzen (Wernerschen Komplexen) schlagend erwiesen, in deren Molekülen eine Asymmetrie im Sinne der van't Hoff-Le Belschen Theorie nicht bestehen kann, und welche doch durch ihre ganz ungewöhnlich starke optische Aktivität auffallen müssen. Die Ausführungen im 9. Kapitel über die natürliche asymmetrische Totalsynthese, d. h. die Entstehung optisch aktiver Körper aus inaktiven Reagentien, sowie über die Möglichkeit einer künstlichen Nachbildung derselben sind dadurch besonders interessant, daß der Verf. eine Asymmetrie der bei derartigen Vorgängen wirkenden Kräfte als unumgänglich notwendig voraussetzt. — Die Vielseitigkeit des Inhaltes und der Literatur-Nachweise sowie die Klarheit der Darstellung ist an dem Buche besonders hervorzuheben; es bietet deshalb auch nicht nur dem Studierenden eine vorzügliche Wiedergabe des allgemeinen Symmetrieprinzips, sondern es regt auch den Fortgeschrittenen zum Nachdenken über tiefgründige Probleme der Körpergestaltung im weitesten Sinne des Wortes an. Die kleinen Schönheitsfehler der Ausstattung, eine nicht unbeträchtliche Zahl störender Druckversehen und andere Nebensächlichkeiten wären in ruhigeren Zeiten vielleicht in Fortfall gekommen. Manche Einzelheiten botanischen oder zoologischen Inhaltes sind vielleicht auch mit besonderer Freude am Gegenstand ausgeführt worden, und an einzelnen anthropomorphistischen Bildern hat der Ref. nicht immer Gefallen finden können. Im ganzen darf aber die Ansicht vertreten werden, daß in dem vorliegenden Werke ein reizvolles und wichtiges Gebiet ausgezeichnet lehrhaft behandelt ist, über

dessen Bedeutung der Mathematiker und der Kristallograph, der Physiker und der Chemiker, nicht zuletzt auch die Vertreter der biologischen Wissenschaften in seltener Einmütigkeit sich im klaren sind.

Wilhelm Eitel.

Alfred Wegener, Wind- und Wasserhosen in Europa. gr 8°. XI u. 301 S. mit 85 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1917. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.60.

Diese Zusammenstellung vieler seit dem 15. Jahrhundert in Mittel- und Westeuropa beobachteten und z. T. ausführlich beschriebenen Wirbelstürme und ihre nach Entstehung und Wirkung kritische Behandlung ist eine Gelegenheitsschrift zum 70. Geburtstage des gerade um diese meteorologischen Vorgänge sehr verdienten Abteilungsvorstandes an der Deutschen Seewarte, Admiralstabsrat Prof. Dr. W. Köppen. Wenn auch der Verf. selbst sagt, daß die Aufzählung der Einzelfälle durchaus keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann und soll, so bietet doch das sich im ganzen auf 258 Einzelfälle beziehende Material eine reiche Fülle von Tatsachen, die geeignet sind Schlüsse auf die physikalische Natur der Tromben zu ziehen und ihr Auftreten mit den örtlichen und allgemeinen meteorologischen Verhältnissen in Beziehung zu setzen. Der Verf. behandelt der Reihe nach zunächst die Häufigkeit, die örtliche Verteilung, die Abhängigkeit vom täglichen und jährlichen Gang der meteorologischen Elemente und die Fortbewegung der Wirbelstürme, denen sich die Witterungsvorgänge in und um dieselben anschließen. Weiterhin werden Bildung und Auflösung, die Teilung und die Rotation der Tromben behandelt. Die physikalischen Vorgänge in den schärfer begrenzten Wirbeln werden in theoretischer Beziehung untersucht und durch graphische Darstellungen erläutert unter Zugrundelegung der Annahme für das Rotationsgesetz $vr^{\lambda} = k$ und für die Druckverteilung in der Trombe $\frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}$, wo r den Abstand einer gewissen Schicht vom Zentrum der Trombe und λ einen für das Zentrum gleich -1 und für die äußeren Schichten zwischen $+1$ und ∞ variierenden Wert besitzen muß. — Die totale Druckerniedrigung in der Trombe wird dann durch den Ausdruck $760 - \beta = \frac{\alpha V^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_i}\right)$ gegeben, wo β den in der Trombenachse herrschenden Druck, α eine Konstante (für Metermaß = 0,0097), V die Maximalgeschwindigkeit und λ_a und λ_i die obenerwähnten Exponenten sind. Als Zahlenwerte führt der Verf. $V = 80$ m Sek.; $R = 100$ m (Entfg. vom Zentrum) und $\lambda_i = -1$; $\lambda_a = +3$ ein und erhält damit zur Vergleichung mit Beobachtungs-Resultaten:

Max. Geschwindgk. Sek.	10	20	40	60	80	100	200
im Anfangsstadium							
Druckveränderg.:	0,5	1,9	7,8	17,5	31,0	48,5	194
in älteren Tromben:	1,0	3,8	15,6	35,0	61,0	97,0	388

In den nachfolgenden Kapiteln wird dann die äußere Gestalt der Trombe behandelt und in den z. T. sehr eingehenden Schilderungen die häufigen akustischen und elektrischen Begleiterscheinungen. Schließlich werden noch die Schadenwirkungen heftiger Wirbelstürme nach ihren charakteristischen Kennzeichen angeführt und die verschiedenen Ansichten über ihre Entstehung kritisch besprochen. —

Der Text des Buches ist durch ein reiches und gut ausgewähltes, z. T. den Originalberichten entnommenes Bildmaterial ergänzt und durch viele graphische und schematische Darstellungen anschaulich gemacht. Auch die historische Seite des Stoffes ist für spätere ähnliche Untersuchungen von Bedeutung, wenn auch die meteorologisch-physikalischen Fragen durchaus in den Vordergrund gestellt sind. — Ambronn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe der bisherige Privatdozent an der Universität Freiburg i. B. Professor Dr. Kurt Heß für Chemie.

Ernannt: Professor Gustav Jäger an der Technischen Hochschule Wien zum ord. Professor der theoretischen Physik an derselben Hochschule.

Berufen: Dr. H. du Bois zum ord. Professor für Theorie und Anwendungen des elektromagnetischen Feldes an der Universität Utrecht (zugleich als Leiter des von Berlin in einem dafür errichteten modernen Neubau überführten Bosscha-Laboratorium).

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie am University College in Galway (Irland) Dr. Alfred Senier.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Richard Meyer (zum 1. Oktober 1918).

Angebote.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht

für Arbeiten auf dem Gebiete der

Hochfrequenz.

Bewerbungen erbeten an

Siemens & Halske A.-G.
Wernerwerk, Abt. M.
Siemensstadt bei Berlin.

Physiker und Elektroingenieure

mit abgeschlossener Hochschulbildung zur experimentellen Durchbildung von Apparaten für drahtlose Telegraphie, insbesondere Verstärkern und Röhrensendern gesucht. Bewerbungen mit Angabe des Bildungsganges und der Gehaltsansprüche erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik elektrischer Apparate,
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Polyphos

München, Schillerstr. 16

Spezialfabrik f. Röntgenapparate und Röntgenröhren

Die

Ventil-Vakuumröhre „Constanz“,

⟨2 D.R.P., 2 D.R.G.M.⟩

die ausschließlich von der **Polyphos-Ges.** hergestellt wird, hat sich zur **Unterdrückung der ungewünschten Stromphase** in **vieljähr.** Verwendung **glänzend bewährt.**

Sie zeigt im Gegensatz zu anderen Ventilröhren bei richtiger Härte **keine Fluoreszenz** des Glases.

Dr. Loose, Bremen, schreibt u. a.: **„Ich begrüße diese Röhre als einen wesentlichen Fortschritt“.**

Induktorium

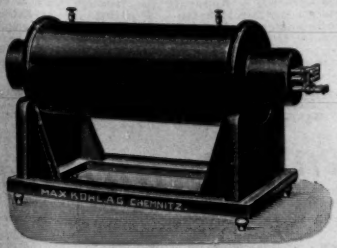
Patent Klingelfuß

mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampèremeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

Fr. Klingelfuß & Co., Basel.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



62582. Funkeninduktor mit Sekundärwicklung von geringem Widerstand, für Wehnelt-Unterbrecher, 400 mm Funkenlänge.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen; T. = Tagesereignisse.)

Seite

Ambronn, R., Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern 401
Asymmetrischer Kreisel: Zur Quantelung des —, v. F. Reiche 394
Bender, J., Über die kritische Temperatur des Quecksilbers 410
Des Coudres, Th., Wilhelm Feddersen † 393
Elektrische Leitfähigkeit: Über die — von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern, v. R. Ambronn 401
Erde: Die Bewegung der Drehachse der elastischen — im Erdkörper, v. W. Schweyder. (B.) 415
Feddersen, Wilhelm †. (Des Coudres.) 393
Fernsprecher: 40 Jahre —. Stephan-Siemens-Rathenau, v. O. Große. (B.) 416
Gashäute: Eine Zusammenstellung und Kritik der Literatur über — an der Oberfläche fester Körper. Preisausschreiben. (T.) 416
Große, O., 40 Jahre Fernsprecher. Stephan-Siemens-Rathenau. (B.) 416
Grotrian, O., Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der Hysteresisschleife 408
Hysteresisschleife: Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der —, v. O. Grotrian 408
Kalk-Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-—, v. R. Ambronn 401
Krauß, J., Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. (B.) 415

Seite

Kreisel: Zur Quantelung des asymmetrischen —, v. F. Reiche 394
Leitfähigkeit: Über die elektrische — von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern, v. R. Ambronn 401
Meteorologie: Grundzüge der maritimen — und Ozeanographie, v. J. Krauß. (B.) 415
Natron-Kalk-Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von —, v. R. Ambronn 401
Quantelung: Zur — des asymmetrischen Kreisels, v. F. Reiche 394
Quecksilber: Über die kritische Temperatur des —, v. J. Bender 410
Reiche, F., Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels 394
Schaefer, Cl., Zur Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. II. 406
Schmidt, H., Zur Theorie der Triboluminescenz . . 399
Schüle, W., Technische Thermodynamik. I. (B.) . 415
Schweyder, W., Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper. (B.) 415
Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-—, v. R. Ambronn 401
Temperatur: Über die kritische — des Quecksilbers, v. J. Bender 410
Thermodynamik: Technische —, v. W. Schüle. I. (B.) 415
Triboluminescenz: Zur Theorie der —, v. H. Schmidt 399

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Anorganisch-chemisches Praktikum

von **Dr. E. H. Riesenfeld,**
a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br.

Qualitative Analyse und anorganische Präparate.

Zweite Auflage. Mit 13 Abbildungen im Text. Preis gebunden 7 Mark.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.